

Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag



Faglig kontakt under eksamen: Ola Diserud
Telefon: 932 18 823

ST1101 SANNSYNLIGHETSREGNING /
ST6200 SANNSYNLIGHETSREGNING

Torsdag 6. desember 2007
Tid: kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Lommekalkulator.

Sensur: 6. januar 2008

Oppgave 1

Mange sjeldne, arvelige sykdommer skyldes såkalte recessive gener. For at en person skal lide av en slik sykdom må personen arve et bestemt recessivt gen a fra både mor og far. Personen vil ikke lide av sykdommen hvis hun/han arver det tilsvarende dominante genet A fra minst en av foreldrene.

Dette medfører at en person som arver det recessive genet a fra begge foreldrene får genotypen aa , og vil lide av sykdommen. En person som arver det recessive genet a fra den ene av foreldrene og det dominante genet A fra den andre, får genotypen Aa . Denne personen vil være frisk, men er bærer av genet for sykdommen og kan bringe det videre til sine barn. En person som arver det dominante genet A fra begge foreldrene får genotypen AA . Denne personen er frisk, og er ikke bærer av sykdommen.

Anta videre at sykdommen er dødelig, slik at vi ikke har noen voksne med sykdommen. Vi ser først på et ektepar der begge er bærere av sykdommen, dvs. begge har genotypen Aa . Et barn de får sammen arver fra hver av foreldrene enten det recessive genet a med sannsynlighet $\frac{1}{2}$ eller det dominante genet A med sannsynlighet $\frac{1}{2}$. Videre er arven fra de to foreldrene uavhengig.

- a) Vis at sannsynligheten for at barnet skal lide av sykdommen er $\frac{1}{4}$.
Hva blir sannsynligheten for at barnet skal bli en frisk bærer av sykdomsgenet?

Anta at det i den voksne befolkningen er 5% friske bærere av genet for sykdommen, mens 95% er friske ikke-bærere av sykdomsgenet. Vi ser videre på et tilfeldig valgt par, og antar at det er uavhengighet mellom kvinnen og mannen med hensyn til om de er bærere av sykdomsgenet.

- b) Hva blir sannsynligheten for at både mannen og kvinnen er bærere av sykdomsgenet?
 Hva blir sannsynligheten for at nøyaktig en av dem er bærer av genet?
 Hva blir sannsynligheten for at et barn ekteparet får sammen vil lide av sykdommen?
- c) Vi får så vite at paret har fått tre barn som alle er friske, dvs. de har enten genotypen Aa eller genotypen AA . Hva blir da den betingede sannsynligheten for at verken kvinnen eller mannen er bærere av sykdomsgenet?

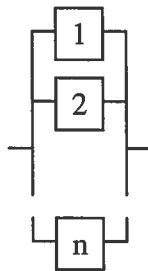
Oppgave 2

Et elektrisk system består av n like komponenter. Hver komponent har sannsynlighet p for å svikte ved en gitt belastning, og komponentene går i stykker uavhengig av hverandre.

- a) Anta først at systemet er koblet i serie, dvs. systemet fungerer kun hvis ingen av komponentene har sviktet (se figur under). Hva blir da sannsynligheten for at det elektriske systemet skal svikte, uttrykt ved n og p ?



En annen måte å sette komponentene sammen i et system er i parallell (se figur under), hvor systemet fungerer helt til siste komponent går i stykker. Hva er nå sannsynligheten for systemsvikt, fortsatt uttrykt ved n og p ?



- b) I et m -av- n system fungerer systemet dersom m eller færre komponenter har sviktet. Hva blir sannsynligheten for systemsvikt for et slikt system?
 Anta at vi i et gitt system har 400 komponenter, sviktsannsynlighet for hver komponent på 0,07 og $m = 40$. Beregn tilnærmet sannsynlighet for systemsvikt.

Oppgave 3

Levetiden T for komponenter lik de i oppgave 2 antas ofte å ha en sannsynlighetsfordeling gitt ved funksjonen

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k}, & t > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

der k og λ er positive parametere. Dette er en såkalt Weibullfordeling.

- a) Finn den kumulative fordelingsfunksjonen for T . Hvilken kjent fordeling framkommer når $k = 1$?
- b) La $f(t|T > t_0)$ være sannsynlighetsfordelingen for den totale levetiden, gitt at komponenten er i orden etter t_0 tidsenheter. Vis generelt at

$$f(t|T > t_0) = \begin{cases} \frac{f(t)}{1 - F(t_0)}, & t > t_0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Størrelsen $h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ kalles komponentens hasardrate. Utled hasardraten

$h(t)$ for T .

- c) Vis at $X = k^{-1}T^k$ blir eksponensialfordelt.