Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: John Tyssedal
Telefon: 73593534

ST1101 SANNSYNLIGHETSREGNING
Torsdag 9. desember 2010
Tid: kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Lommekalkulator.

Sensur: 6. januar 2011

Oppgave 1

Du skal spille mini-lotto der en vinnerrekke bestående av 3 tall trekkes tilfeldig uten tilbakelegging fra sifrene 0, 1, …, 9. Videre trekkes det så ett tilleggstall fra de resterende sifrene. Du leverer inn en kupong med en rekke bestående av 3 forskjellige sifre.

a) Hva er sannsynligheten for at din rekke blir vinnerrekka?
Hvor mange forskjellige rekker må du levere inn for at sannsynligheten for at du får vinnerrekka blir 0,3?

b) Hvis din rekke har nøyaktig ett av tallene i vinnerrekka, og du dessuten har det tilleggstallet som trekkes ut, vinner du 3dje premie. Hva er sannsynligheten for at du vinner 3dje premie når du leverer en kupong med en rekke?

Oppgave 2

Tiden skøyteløper A bruker på et 500 m løp med siste ytre sving er $N(36{,}80,\ 0{,}25^2)$. Tilsvarende tid for skøyteløper B er $N(37{,}00,\ 0{,}25^2)$. Hvis skøyteløperne har siste indre sving er forventet tid 0,2 sekunder mer, mens variansen er den samme.

a) Hva er sannsynligheten for at A slår B i et samløp hvor A har siste ytre og B siste indre? Finn den samme sannsynligheten når B har siste ytre og A siste indre.

b) Hva er sannsynligheten for at A slår B når trekningen av baner ennå ikke er foretatt?

c) Hva er sannsynligheten for at B slår A minst 2 ganger i løpet av 5 samløp der B har siste indre i hvert løp?

Oppgave 3

En stokastisk variabel X har fordelingen $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$, dvs. den er Poissonfordelt.

a) Vis at den momentgenererende funksjonen til X blir $M_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right] = e^{\lambda(e^t - 1)}$.

[Hint: Bruk at $e^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!}$]. Bruk $M_X(t)$ til å finne $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

b) Anta at de stokastiske variablene X og Y er uavhengige med momentgenererende funksjoner $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Vis at $Z = X + Y$ har momentgenererende funksjon $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

c) Anta at X er Poissonfordelt med parameter λ, Y er Poissonfordelt med parameter μ og at X og Y er uavhengige.

Vis at momentgenererende funksjon for $Z = X + Y$ blir $M_Z(t) = e^{(\lambda+\mu)(e^t - 1)}$.
Forklar hvorfor dette betyr at Z er Poissonfordelt med parameter $\lambda + \mu$.

Oppgave 4

En fabrikk produserer en vare vha. 3 parallelle maskiner. Maskin A, B og C står for hhv. 30 %, 20 % og 50 % av den totale vareproduksjonen. Feilproduksjonen i maskin A, B og C er henholdsvis 2 %, 3 % og 1 %.

a) Hva blir den totale feilproduksjonen av denne varen?
Hva er sannsynligheten for at en vare med feil er produsert med maskin C?