NTNU
Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet

Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
John Tyssedal 41645376

Eksamen i ST1101/ST6101 Sannsynlighetsregning og statistikk
August 2013
Tid: kl. 09:00 - 13:00

Tillatte hjelpemidler:
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag. K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater.
Godkjent kalkulator: HP30S, CITIZEN SR-270X eller CITIZEN SR-270X college.

Oppgave 1

I en skoleklasse er det 6 gutter og 9 jenter. Hver skoledag får en elev i oppdrag av læreren å tørke av tavlen. I denne oppgaven betyr dager det samme som skoledager og disse tenker vi oss nummerert slik at 1. skoledag har nr. 1, 2. skoledag har nummer 2 osv. Vi antar dessuten at vi er ved starten av skoleåret.

a) Anta at læreren hver dag velger ut en elev tilfeldig av de 15 til å tørke av tavlen. La X være antall jenter som blir valgt ut i en periode på 10 dager. Forklar hvorfor X er binomisk fordelt. Finn sannsynligheten for at $X=6$ og dessuten sannsynligheten for at X er større enn 5.

b) Anta i dette punktet at utvelgingen skjer tilfeldig, men at ingen kan bli valgt ut på nytt før alle har hatt jobben med å tørke av tavlen. La Y være antall jenter som blir valgt ut de 10 første dagene. Hvilken fordeling får Y? Grunngi svaret. Finn sannsynligheten for at $Y=6$.

I punkt c) og d) skal vi som i punkt a) anta at læreren hver dag velger tilfeldig blant de 15 elevene.

c) Hva er sannsynligheten for at det går minst 5 dager før en gutt blir valgt ut? Anta så at det har gått 5 dager uten at en eneste gutt er valgt ut. Hva er sannsynligheten for at det går minst 5 dager til før dette skjer?

d) I dette punktet skal vi for enkelhets skyld anta at et skoleår har uendelig mange dager. Håkon er en elev i klassen. Finn sannsynligheten for at han blir valgt ut for andre gong den 15. dagen. Hvilket forventet nummer har dagen der Håkon blir valgt ut for andre gang?

Oppgave 2

I en fotballsesong i tippeligaen skal hvert lag spille 30 kamper, 15 hjemmekamper og 15 bortekamper. Et av fotballagene regner med at sannsynligheten for å vinne på hjemmebane er 0.70 og sjansen for å vinne på bortebane er 0.40. Anta videre at resultatet i en kamp ikke påvirker resultatet i en annen kamp. La X_H være tallet på hjemmeseire og X_B være tallet på borteseire i en og samme sesong.

a) Forklar hvorfor $E\left[X_H\right]=\mu_H=10.5$, $Var\left[X_H\right]=\sigma_H^2=3.15$, $E\left[X_B\right]=\mu_B=6.0$ og $Var\left[X_B\right]=\sigma_B^2=3.6$.

I spørsmål b) skal vi anta at fordelingene til X_H og X_B kan tilnærmes med normalfordelinger med forventninger og varianser som gitt i 2a).

b) Finn en tilnærmet sannsynlighet for at laget vinner mer enn 20 kamper. Hva er en tilnærmet sannsynlighet for at laget vinner flere hjemmekamper enn bortekamper?

Fotballaget får 3 poeng for seier, 1 poeng for uavgjort og 0 poeng for tap. La sannsynligheten for uavgjort på hjemmebane være 0.2 og sannsynligheten for uavgjort på bortebane være 0.3. La videre Y_H og Y_B være antall uavgjorte kamper på hjemme og bortebane i en og samme sesong henholdsvis.

c) La T være antall poeng laget får i en sesong. Forklar hvorfor

$$T=3\left(X_H+X_B\right)+Y_H+Y_B$$

Finn $E\left[T\right]$.

d) Hvilken fordeling har X_H+Y_H?

Finn kovariansen mellom X_H og Y_H.

Oppgave 3

La X være kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \mathrm{x} \geq \theta > 0 \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$$

a) Vis at den momentgenererende funksjonen til X er

$$M_X(t)=\frac{e^{\theta t}}{1-t},\ t<1$$

Finn $E(X)$ og $Var(X)$.

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være et tilfeldig utvalg der alle har samme fordelingen som X.

b) Sett opp rimeligfunksjonen (likelihood funksjonen) og finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for θ basert på $X_1, X_2, \ldots, X_n$.