Løysingsforslag ST1101/ST6101

august 2013

Oppgåve 1

a) X = talet på jenter som blir valgt ut i ein periode på 10 dagar

Tilfeldig utval => 10 uavh. forsøk

$P(\text{jente valgt ut}) = \frac{9}{15} = 0.6$ i kvart forsøk

Reg: jente eller gutt i kvart forsøk

∴ X er binomisk fordelt ∴ $X \sim B(10, 0.6)$

$P(X=6) = \binom{10}{6} 0.6^6 \cdot 0.4^4 = P(X \le 6) - P(X \le 5) = 0.6177 - 0.3669 \approx \underline{0.25}$

$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - 0.3669 = \underline{0.6331}$

b)

To grupper $\begin{cases} \text{jenter} \\ \text{gutter} \end{cases}$ Trekker ut tilfeldig 10 stykker utan tilbakelegging =>

hypergeometrisk fordeling.

Y = talet på jenter som blir trukne ut

$$P(Y=6) = \frac{\binom{9}{6}\binom{6}{4}}{\binom{15}{10}} = \frac{60}{149} \approx \underline{0.4}$$

c)

P(Minst 5 dagar før gutt blir valgt ut)

$= P(\text{Jenter blir valgt ut dei 4 første dagane}) = (0.6)^4 = \underline{0.13}$

La Z vere talet på dagar til 1 gut blir valgt ut.

$$P(Z \ge 10 \mid Z \ge 6) = \frac{P(Z \ge 10)}{P(Z \ge 6)} = \frac{0.6^9}{0.6^5} = (0.6)^4 = \underline{0.13}$$

d) La X vere dagen Håkon blir valgt ut for 2. gong ⇒:
X er negativt binomisk fordeelt.

$$P(X=15) = \binom{14}{1}\left(\frac{1}{15}\right)^2\left(\frac{14}{15}\right)^{13} = \left(\frac{14}{15}\right)^{14} \cdot \frac{1}{15} = \underline{0.025}$$

$$E[X] = \frac{n}{p} = \frac{2}{1/15} = \underline{30}$$

Oppgåve 2

a) X_H og X_B er begge binomisk fordelte.

$X_H \sim B(15, 0.7)$, $\quad X_B \sim B(15, 0.4)$

$$E[X_H] = 15 \cdot 0.7 = \underline{10.5}$$

$$E[X_B] = 15 \cdot 0.4 = \underline{6}$$

$$Var[X_H] = 15 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = \underline{3.15} = \sigma_H^2$$

$$Var[X_B] = 15 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = \underline{3.6} = \sigma_B^2$$

b) $X_H \approx N(10.5, 3.15)$, $\quad X_B \approx N(6, 3.6)$

La $Y = X_H + X_B \approx N(16.5, 6.75)$

$$P(Y \geq 20) = P(Y \geq 21) \approx P\left(\frac{Y-16.5}{\sqrt{6.75}} \geq \frac{21-16.5}{\sqrt{6.75}}\right) = P(Z \geq 1.73)$$

$$= 1 - \Phi(1.73) = 1 - 0.9582 = \underline{0.0418}$$

Med kontinuitetskorreksjon

$$P\left(Z > \frac{20.5-16.5}{\sqrt{6.75}}\right) = 1 - \Phi(1.54) = 1 - 0.938 = \underline{0.062}$$

$D = X_H - X_B \approx N(4.5,\ 6.75)$

$P(D > 1) \approx P\left(\frac{D - 4.5}{\sqrt{6.75}} \geq \frac{1 - 4.5}{\sqrt{6.75}} \right) = 1 - \Phi(-1.347)$

$\approx 1 - 0.089 = 0.911$

Med kontinuasjonsapproksimasjon

$P\left(Z \geq \frac{0.5 - 4.5}{\sqrt{6.75}} \right) = 1 - \Phi(-1.54) = 1 - 0.062 = 0.938$

c) Laget får 3 poeng for seier og 1 poeng for uavgjort.

$\Rightarrow T = 3(X_H + X_B) + 1(Y_H + Y_B) = 3X_H + 3X_B + Y_H + Y_B$

$E[Y_H] = 15 \cdot 0.2 = 3 \qquad E[Y_B] = 15 \cdot 0.3 = 4.5$

$\Rightarrow E[T] = 3 \cdot E[X_H + X_B] + E[Y_H] + E[Y_B] = 3 \cdot 16.5 + 3 + 4.5 = \underline{57}$

d)

$X_H + Y_H$ er $B(15,\ 0.9)$ sidan vi kan

registrere A = seier eller uavgjort eller A^c = tap.

$Var[X_H + Y_H] = 15 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = Var[X_H] + Var[Y_H] + 2\,cov[X_H, Y_H]$

$\Rightarrow 3.15 + 15 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 2\,cov[X_H, Y_H] = 15 \cdot 0.9 \cdot 0.1$

$\Rightarrow 2\,cov[X_H, Y_H] = 1.35 - 2.4 - 3.15 = -4.2 \quad :2 \Rightarrow cov[X_H, Y_H] = -2.1$

Oppgåve 3

a) $E[e^{tX}] = M_X(t) = \int_\theta^\infty e^{tx} e^{-(x-\theta)} dx = e^\theta \int_\theta^\infty e^{-x(1-t)} dx$

$= e^\theta \left[-\frac{e^{-x(1-t)}}{1-t} \right]_\theta^\infty$ for $t < 1$

d: $M_X(t) = \frac{e^\theta e^{-\theta(1-t)}}{1-t} = \frac{e^{\theta t}}{1-t}$, $t < 1$

$M_X'(t) = \frac{\theta e^{\theta t}}{1-t} + \frac{e^{\theta t}}{(1-t)^2}$

$M_X''(t) = \frac{\theta^2 e^{\theta t}}{1-t} + \frac{\theta e^{\theta t}}{(1-t)^2} + \frac{\theta e^{\theta t}}{(1-t)^2} + \frac{2 \cdot e^{\theta t}}{(1-t)^3}$

$M_X'(0) = E[X] = \frac{\theta \cdot 1}{1} + \frac{1}{1} = \underline{\theta + 1}$

$E[X^2] = M_X''(0) = \theta^2 + 2\theta + 2$

$\Rightarrow$ $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \theta^2 + 2\theta + 2 - (\theta+1)^2 = \underline{1}$

b) $L[\theta | x_1, \dots, x_n] = \prod_{i=1}^n e^{-(x_i - \theta)} = e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}$

$\ln L[\theta | x_1, \dots x_n] = -\sum_{i=1}^n x_i + n\theta$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = n > 0$ d: $L[\theta | x \dots x_n]$ er strengt veksande.

For å maksimere denne må θ gjerast så stor som mogeleg

Men $\theta \leq x_i$ for alle i d: $\theta = \min\{x_1, \dots, x_n\}$.