NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
ST1101/ST6101 Sannsynlighetsregning og statistikk

Faglig kontakt under eksamen: Nikolai Ushakov

Tlf: 45128897

Eksamensdato: 15.august 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
– Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag,
– K.Rottman. Matematisk formelsamling,
– Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater,
– Kalkulator: HP30S, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller Casio fx-82ES PLUS.

Annen informasjon:
Sensur:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

En sjelden genvariant a disponerer for en bestemt sykdom. I en populasjon er den relative frekvensen av individ som bærer to kopier av genvarianten (individ av genotype aa) 0.0001, frekvensen av individ som bærer en kopi (genotypen Aa) er 0.0198 og frekvensen av individ som ikke har den sjeldne genvarianten (genotypen AA) er 0.9801. Anta at sannsynligheten for at sykdommen kommer til uttrykk blant personer med genotype aa, aA og AA er henholdsvis 0.6, 0.02 og 0.01.

a) Hva er sannsynligheten for at sykdommen kommer til uttrykk i et tilfeldig valgt individ fra populasjonen?

b) Hva er de respektive sannsynlighetene for at et individ er av genotypene aa, Aa og AA gitt at sykdommen har kommet til uttrykk i individet?

Oppgave 2

En fabrikk produserer en spesiell type maskinkomponenter. Tiden fra en komponent blir tatt i bruk til den bryter sammen for første gang, kaller vi levetiden for komponenten. Erfaring har vist at levetiden T, målt i uker, kan modelleres som en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f_T(t) = \begin{cases} 2\lambda t e^{-\lambda t^2} & \text{for } t \geq 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der $\lambda > 0$ er en ukjent parameter.

a) Bestem den kumulative fordelingsfunksjonen $F_T(t)$ til T.

b) Finn den betingede sannsynligheten

$$P(T > 2/\sqrt{\lambda} \mid T > 1/\sqrt{\lambda})$$

(at $T > 2/\sqrt{\lambda}$ gitt $T > 1/\sqrt{\lambda}$).

c) Parameteren λ skal estimeres på basis av levetidene $T_1, ..., T_n$ for $n > 2$ tilfeldig valgte komponenter. $T_1, ..., T_n$ antas uavhengige og identisk fordelte med sannsynlighetstetthet $f_T(t)$. Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ blir

$$\hat{\lambda}_{\text{SME}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}.$$

Oppgave 3

Den simultane sannsynlighetstettheten til X og Y er

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{hvis } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

a) Finn $P(Y < X)$.

b) Finn $P(Y < X | Y < 1/2)$.

Oppgave 4

Anta at A og C er uavhengige hendelser, og at B og C er uavhengige.

a) Kan $A \cap B$ og C være avhengige? Kan $A \cup B$ og C være avhengige?

b) Hva blir svarene i a) dersom man gjør en tilleggsantakelse om at A og B er disjunkte?

Begrunn svarene.

Oppgave 5

En stokastisk variabel X har en gammafordeling, dvs sannsynlighetstettheten til X er

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor $r > 0$, $\lambda > 0$.

a) Finn parametrene r og λ hvis $EX^2 = 2(EX)^2$ og $Ee^X = 2$.