

Oppgave 1

La A være en hending som er inneholdt i B , vi skriver $A \subset B$.

- a) Forklar hvorfor $P(A) \leq P(B)$ og hvorfor $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.

En familie har 4 barn. Anta at sannsynligheten for at et barn er jente eller gutt er lik, det vil si $\frac{1}{2}$, og at kjønnet av et barn ikke er avhengig av kjønnet av de andre barna.

- b) Finn sannsynligheten for at alle er gutter. Finn også sannsynlighetene $P(\text{alle er gutter} | \text{minst en er gutt})$ og $P(\text{alle er gutter} | \text{minst tre er gutter})$.

Oppgave 2

Hans ønsker å starte en «facebookgruppe» med medlemmer som er født i samme måned som han selv. For å få tak i potensielle kandidater til «facebookgruppen» vil han spørre tilfeldig utvalgte i befolkningen. La A være hendelsen at en tilfeldig utvalgt person er født i samme måned som Hans. Du kan fra nå av betrakte eksperimentet hans som en uendelig forsøksrekke av uavhengige forsøk, der det blir registrert om A skjer eller ikke og der $P(A) = \frac{1}{12}$. La T være antall personer han må spørre før han første gang treffer på en som er født i samme måned som han selv.

- a) Forklar hvorfor $P(T = k) = \left(\frac{11}{12}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{12}$, $k=1,2,3,\dots$. Hvilken fordeling er dette? Hva blir sannsynlighetene $P(T > k)$ og $P(T \leq k)$?

- b) For $P(A) = p$ er den momentgenererende funksjonen til T gitt ved:

$$M_T(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p).$$

Bruk denne til å vise at $E(T) = 12$ og at $\text{Var}(T) = 132$.

Hans har bestemt seg for å fortsette å spørre til han har funnet 15 personer som er født i samme måned som han selv. La N være antallet han må spørre før han har 15 slike.

- c) Hvilken fordeling har N ? Grunngi svaret. Forklar hvorfor $E(N) = 15 \cdot E(T)$ og $\text{Var}(N) = 15 \cdot \text{Var}(T)$.
- d) Finn sannsynligheten for at Hans må spørre mer enn 220 personer før han har 15 personer som er født i samme måned som han selv. (Hint: Bruk tilnærming til normalfordeling). Anta så at Hans fekk den 14. kandidaten nøyaktig da han hadde spurt 200 personer. Hva er sannsynligheten for at han må spørre mer enn 20 til?

Grete vil og starte «facebookgruppe». Men Grete vil bare ha med de som er født på samme dato som henne. Utover det vil hun spørre personer på samme måte som Hans. Anta nå at hvert år har 365 dager og at Grete har bestemt seg for å slutte å spørre når hun har spurt 1095 personer. La X være antall potensielle kandidater Grete har fått til «facebookgruppen» sin.

- e) Hvilken fordeling har X ? Grunngi svaret. Hvorfor er $P(X = 0) \approx e^{-3}$?

Oppgave 3

Bremselengden Y (målt i meter) for en bil som kjører i en hastighet $10x$ km/time antas å være normalfordelt med forventning θx^2 og standardavvik σx^2 . For en bil som kjører i 40 km/t er $x = 4$, og bremselengden vil dermed være normalfordelt med forventning 16θ og standardavvik 16σ . Parametrene θ og σ vil avhenge av forsøksbetingelsene, f. eks. bremsenes egenskaper, dekktype, veidekke, vær, føreforhold og målenøyaktighet. Anta i punkt a) at $\theta = 0.5$ og $\sigma = 0.1$.

- a) Finn sannsynligheten for at bremselengden for en bil som kjører i 40 km/t er kortere enn 6 meter. Hva er sannsynligheten for at bremselengden ligger mellom 7 og 9 meter?

I punkt b) og c) skal vi anta at θ er ukjent, mens σ fortsatt antas å være kjent, $\sigma = 0.1$.

På en forsøksbane blir det gjort 8 målinger, $Y_1, \dots, Y_8$, av bremselengden med den samme bilen og hver gang med hastigheten 40 km/t. Vi skal anta at $Y_1, \dots, Y_8$ er uavhengige.

- b) Hva blir estimatet for θ når de observerte verdiene for $Y_1, \dots, Y_8$ er:
8.4, 7.8, 10.3, 8.7, 10.7, 10.0, 8.8, 12.1 ?
Utled et 95% konfidensintervall for θ .

\

- c) Anta nå i stedet at vi for den samme bilen har tilgjengelig 6 observasjoner, $Y_1, \dots, Y_6$, av bremselengden ved en hastighet på 40 km/t og to observasjoner, Y_7, Y_8 , av bremselengden ved en hastighet på 50 km/t. Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for θ basert på $Y_1, \dots, Y_8$. Finn også forventning og varians til denne.