NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
ST1101/ST6101 Sannsynlighetsregning og statistikk

Faglig kontakt under eksamen: Thea Bjørnland

Tlf: 41123849

Eksamensdato: 9. august 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Tabeller og formler i statistikk, Akademika,
K. Rottman: Matematisk formelsamling, Spektrum forlag,
Bestemt, enkel kalkulator,
Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

En urne inneholder 10 røde kuler og 8 blå kuler.

a) Dersom du trekker tre kuler *med* tilbakelegging, hva er sannsynligheten for at du først trekker en rød kule og deretter to blå kuler?

Dersom du trekker tre kuler *uten* tilbakelegging, hva er sannsynligheten for at du først trekker en rød kule og deretter to blå kuler?

Dersom du trekker 10 kuler *uten* tilbakelegging, hva er sannsynligheten for at du trekker minst 8 røde kuler?

Oppgave 2

X og Y er to diskrete stokastiske variabler med simultan punktsannsynlighet gitt i tabellen under.

$x \setminus y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.3
1	0.2	0.1	0.1

a) Hva er $\mathrm{P}(X \leq 1 \cap Y < 1)$?

Hva er $\mathrm{P}(Y \leq 1 | X = 1)$?

Er X og Y uavhengige stokastiske variabler? Begrunn svaret ditt.

b) Finn $\mathrm{E}(2X + 3Y)$ og $\mathrm{Var}(2X + 3Y)$.

Oppgave 3

Den kontinuerlige stokastiske variabelen X har følgende kumulative fordelingsfunksjon:

$$F_X(x; \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} & \text{for } x \geq 2 \\ 0 & \text{for } x < 2 \end{cases}$$

Dette er et eksempel på en Pareto-fordeling.

Parameteren i fordelingen, α, oppfyller $\alpha > 1$.

a) Anta i dette punktet at $\alpha = 1.5$ og finn

$\mathrm{P}(X \leq 3)$, $\mathrm{P}(3 < X \leq 4)$ og $\mathrm{P}(X > 4|X > 3)$.

b) Finn sannsynlighetstettheten $f_X(x;\alpha)$.

For et tilfeldig utvalg $X_1, \ldots, X_n$ fra Pareto-fordelingen, utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for α.

c) Forventningsverdien til X er $\mathrm{E}(X) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$. Bruk momentmetoden for å utlede en estimator for α.

Oppgave 4

På en meierifabrikk arbeider det 100 personer. Fabrikken åpner klokka 07:30. Arbeiderne ankommer uavhengig av hverandre. For enhver arbeider kan tiden i minutter fra åpning frem til han eller hun ankommer antas å være eksponensialfordelt med parameter $\lambda = \frac{1}{2}$.

a) En av arbeiderne heter Grete. På en bestemt arbeidsdag, hva er sannsynligheten for at Grete kommer til fabrikken før klokka 07:32?

Hva er sannsynligheten for at alle arbeiderne har kommet på jobb før klokka 07:32?

Grete skriver ned sin ankomstid hver dag i 100 arbeidsdager. Hva vil du anslå at hun regner ut som gjennomsnittlig ankomstid? Gi en begrunnelse for svaret ditt.

På fabrikken er det en maskin som produserer iskaffe ved å fylle kartonger med kaffe og melk. En kartong fylles med X dl (desiliter) kaffe og Y dl melk, der X er normalfordelt med forventningsverdi μ_1 dl og standardavvik $\sigma_1 = 0.5$ dl og Y er normalfordelt med forventningsverdi μ_2 dl og standardavvik $\sigma_2 = 0.3$ dl. Mengden melk er uavhengig av mengden kaffe. Parameterne μ_1 og μ_2 kan bestemmes av maskinoperatøren.

Maskinoperatøren påstår at han har stilt inn iskaffe-maskinen slik at $\mu_1 + \mu_2 = 5$ dl.

b) Grete mistenker at maskinoperatøren har gjort en feil i innstillingen av maskinen slik at $\mu_1 + \mu_2 \neq 5$ dl. Hun måler derfor antall desiliter iskaffe i 20 tilfeldig valgte iskaffekartonger $(v_1, \ldots, v_{20})$ og finner at $\sum_{i=1}^{20} v_i = 100.33$ dl.

Utled et 95% konfidensintervall for $\mu_1 + \mu_2$ basert på Gretes observasjoner. Vis alle stegene i utledningen.

Bruk konfidensintervallet til å diskutere Gretes påstand. Kan vi si om Grete eller maskinoperatøren har rett?

En kunde får pengene sine tilbake dersom han har kjøpt en kartong med mindre enn 4.5 dl iskaffe. La A være hendelsen 'kunde får pengene tilbake'.

c) Anta i dette punktet at $\mu_1 + \mu_2 = 5$ dl.

Hva er $\mathrm{P}(A)$?

En gjeng studenter kjøper 50 kartonger med iskaffe. La W være antall kartonger med mindre enn 4.5 dl iskaffe. Hvilke antagelser må vi gjøre for kunne regne med at W er binomisk fordelt?

Dersom disse antagelsene stemmer, finn (eksakt) $\mathrm{P}(W > 2)$.

d) Fabrikken ønsker å minke sannsynligheten for at hendelse A inntreffer. De kjøper inn en ny maskin der mengden melk som fylles i en kartong er konstant lik 3 dl, mens antall desiliter kaffe fremdeles er normalfordelt med forventning μ_1 dl og standardavvik 0.5 dl. Hvilken innstilling for μ_1 må de bruke for at hendelsen A skal inntreffe med sannsynlighet $\mathrm{P}(A) = 0.025$?