Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG
EKSAMEN I ST1101/ST6200 SANNSYNLIGHETSREGNING
Fredag 11. juni 2010
Tid: 09:00–13:00

Oppgave 1

På en arbeidsplass blir 1% av personalet skadd hvert år. 60% av de skadde er menn. 30% av personalet er kvinner.

For en tilfeldig person blant personalet definerer vi hendelsene

S = "Personen blir skadd i løpet av året"

M = "Personen er en mann"

K = "Personen er en kvinne"

a) Formuler de gitte opplysningene som sannsynligheter. Finn $P(M)$ og $P(S|M)$.

Løsning.

$$P(S) = 0.01, \; P(M|S) = 0.6, \; P(K) = 0.3$$

$$P(M) = 1 - P(K) = 0.7, \quad P(S|M) = \frac{P(M|S)P(S)}{P(M)} = \frac{6}{700}$$

b) Har mannlige eller kvinnelige ansatte størst risiko for å bli skadet? Begrunn svaret.

Løsning.

$$P(S|K) = \frac{P(K|S)P(S)}{P(K)} = \frac{4}{300} > \frac{6}{700} = P(S|M).$$

Kvinnelige ansatte har størst risiko for å bli skadet.

Oppgave 2

La X og Y være stokastiske variabler slike at $X + Y = c$, hvor c er en konstant.

a) Bevis at kovariansen mellom X og Y er ikke-positiv: $Cov(X, Y) \leq 0$.

Løsning.

$$Cov(X, Y) = EXY - EXEY = EX(c - X) - EXE(c - X) =$$
$$= -EX^2 + (EX)^2 = -VarX \leq 0.$$

b) Bevis at $VarX = VarY$. Anta at varians til X er streng positiv: $VarX > 0$. Bevis at X og Y er avhengige.

Løsning.

$$VarY = -Cov(X, Y) = VarX.$$

Hvis $VarX > 0$, har vi $Cov(X, Y) \neq 0$ dvs X og Y er korrelerte. Det impliserer at de er avhengige.

c) Anta at X er normalfordelt med parametre μ og σ^2. Finn fordeling til Y.

Løsning. Y er (åpenbart) normalfordelt. $EY = E(c - X) = c - \mu$, $VarY = VarX = \sigma^2$. Så Y har normalfordelingen med parametre $c - \mu$ og σ^2

Oppgave 3

X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} e^{-c(x-\theta)} & \text{for } x \geq \theta > 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Finn c.

Løsning.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{\theta}^{\infty} e^{-c(x-\theta)}dx = \frac{1}{c} = 1$$

derfor $c = 1$.

b) Finn momentgenererende funksjon $M_X(t)$, $E(X)$ og $Var(X)$.

Løsning.

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \int_\theta^\infty e^{tx}e^{-c(x-\theta)}dx = \frac{e^{\theta t}}{1-t},$$

$$EX = M_X'(0) = \theta + 1,\ EX^2 = M_X''(0) = \theta^2 + 2\theta + 2,$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = 1$$

c) La $X_1, ..., X_n$ være uavhengige og identisk fordelte med sannsynlighetstetthet $f(x)$. La Y betegne den minste av X-ene, dvs

$$Y = \min(X_1, ..., X_n).$$

Finn forventningsverdi til Y.

Løsning. Kumulativ fordelingsfunksjon til X er

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-\theta)} & \text{for } x \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

derfor kumulativ fordelingsfunksjon til Y er

$$F_Y(y) = 1 - (1 - F(y))^n = \begin{cases} 1 - e^{-n(y-\theta)} & \text{for } y \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Sannsynlighetstetthet til Y er

$$f_Y(y) = \begin{cases} ne^{-n(y-\theta)} & \text{for } y \geq \theta, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Så

$$EY = \int_\theta^\infty yne^{-n(y-\theta)}dy = \theta + \frac{1}{n}.$$