Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontaktperson:
Håvard Rue 92600021

Eksamen i ST1101/ST6200 Sannsynlighetsregning

Måndag 6.juni 2011
Tid: 09:00–13:00

NYNORSK

Tillatne hjelpemiddel:

- Tabellar og formlar i statistikk (Tapir forlag)
- Gyldig kalkulator

Alle svar skal grunngjevast.

You may answer in English or Norwegian.
Du kan besvare anten på engelsk eller på norsk (begge målføre).

Sensurfrist: 28.juni 2011

Oppgåve 1

La X vere ein tilfeldig variabel med sannsynlighetstetthet

$$f_X(x) = cx^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

og der c er ein konstant.

a) Finn c, forventningsverdien $\mathrm{E}(X)$ og fordelingsfunksjonen $F_X(x)$.

Oppgåve 2

a) Definer og gjer reie for dei 3 aksiom (Kolmogorovs) som definerer eit sannsynlighetsmål P, på eit utfallsrom S med endeleg mengd element.

b) Bruk aksioma til å vise at, for hending A gjeld

$$\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

Oppgåve 3

La X vere normalfordelt med forventningsverdi 1 og varians 4.

a) Regn ut følgjande sannsynligheter:

1. $P(X > 2)$
2. $P(2 < X \leq 3)$
3. $P(X > 2 \mid X > 1)$

Oppgåve 4

La X vere normalfordelt med forventningsverdi μ og varians σ^2. La $Y = \exp(X)$.

a) Finn sannsynlighetstettheten til Y.

Oppgåve 5

La (X, Y) ha simultan punktsannsynlighet

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{45}\, h(x, y)$$

der $h(x, y)$ er gjevne ved

	$h(x,y)$	$y=2$	3	4
	1	1	2	3
x	2	4	5	6
	3	7	8	9

a) Finn (den marginale) punktsannsynligheten til X og forventningsverdien $\mathrm{E}(X)$.

b) La A vere hendinga $Y > X$.

1. Kva er $P(A)$?
2. Kva er $P(A \mid X > 1)$?

Oppgåve 6

La $X_1, \ldots, X_n$ vere uavhengige og identisk fordelte tilfeldige variable med sannsynlighetstetthet $f_X(x) = 1$ viss $0 \leq x \leq 1$ og 0 elles. La $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

a) Finn sannsynlighetstetthet til Y og $P(Y < \frac{1}{n+1})$.

Oppgåve 7

La X og Y vere uavhengige tilfeldige variable med sannsynlighetstetthet $f_X(x) = \exp(-x)$ og $f_Y(y) = \exp(-y)$, for $x, y > 0$. La $Z = X + Y$.

a) Vis at $f_Z(z) = z\exp(-z), \quad z > 0$.

Oppgåve 8

La $X|\lambda$ vere Poisson fordelt med forventningsverdi λ. No er og λ ein tilfeldig variabel og vi let λ vere Gammafordelt med parametrar (s, μ), dvs

$$f_\lambda(\lambda) = \frac{\mu^s}{\Gamma(s)}\lambda^{s-1}\exp(-\mu\lambda), \quad \lambda > 0.$$

a) Vis at

$$f_X(x) = \binom{x+s-1}{x}\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^s\left(1-\frac{\mu}{\mu+1}\right)^x, \quad x = 0, 1, 2\ldots$$

og diskuter resultatet.