NTNU
Noregs teknisk-naturvitskaplege Universitet

Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
John Tyssedal 41645376

-

Eksamen i ST6101 Sannsynlighetsregning og statistikk
Torsdag 16. mai 2013
Tid: kl. 09:00 - 13:00

Tillatte hjelpemiddel:
Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag. K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater.
Enkel kalkulator: HP30S, CITIZEN SR-270X eller CITIZEN SR-270X college.

Sensur: 6. juni 2013

Oppgave 1

I en aldersklasse i et maratonløp antar en at sluttiden målt i minutter til en tilfeldig valgt deltager er normalfordelt med forventing $\mu = 230$ og varians $\sigma^2 = 625$.

a) Hva er sannsynligheten for at en deltager i denne klassen skal få en sluttid mindre enn 165 minutter (2 timer og 45 minutter)? Hva er sannsynligheten for at sluttiden blir mer enn 270 minutt. (4 timer og 30 minutter)?

Det skal arrangeres en lagkonkurranse med 5 deltagere på hvert lag. La $X_1, X_2, \ldots, X_5$ være sluttiden til de 5 deltagerne på ett og samme lag og anta at disse er uavhengige.

b) Hva er sannsynligheten for at laget til sammen bruker mer enn 1100 minutter?
Hva er sannsynligheten for at alle fem bruker mindre enn 230 minutter (3 timer og 50 minutter)?

Oppgave 2

Et skytterlag har kjøpt inn et parti patroner. Skytterne i laget mener at patronene ikke holder høy nok utgangshastighet og ønsker å undersøke dette. Hver skytter får utlevert en eske med 20 patroner. La X være antall patroner med for lav utgangshastighet (senere også kalt defekte) i en eske. Vi skal i denne oppgaven anta at hver patron er defekt med samme sannsynlighet p og uavhengig av om andre patroner er defekte eller ikke.

a) Forklar hvorfor X er binomisk fordelt. Hva er sannsynligheten for at det i en eske på 20 patroner er mer enn 6 defekte dersom vi antar at $p = 0.4$.
Antall defekte i en eske antas også å være uavhengig av antall defekte i andre esker. Hva er sannsynligheten for at akkurat 4 av 10 skyttere har fått utlevert esker med mer enn 6 defekte patroner?

b) En skytter bruker en av 20 patroner i en eske og finner at denne er defekt. Hva er da sannsynligheten for at minst 4 av de andre patronene i esken er defekte når p fremdeles er 0.4?
Anta at det er 5 defekte patroner i en eske på 20 patroner. Hva er da sannsynligheten for at skytteren finner 2 defekte når han bruker 5 patroner?

c) Skytterlaget ønsker å estimere p og lar 5 skyttere skyte hver sin serie. De 3 første skyter 20 skudd hver mens de to siste bare skyter 10 skudd hver. La W_i være antall patroner med for lav utgangshastighet for skytter nummer i, $i=1,2,\ldots,5$. De observerte verdiene ble:

Antall skudd	20	20	20	10	10
w_i :	10	6	12	5	4

Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for p basert på $W_1, W_2, \ldots, W_5$ blir

$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{5} W_i}{80}$. Hva blir estimatet for p med de observerte verdiene gitt ovenfor?

d) Finn forventing og varians til sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren du fant i 2c).
Konstruer et 95 % konfidensintervall for p basert på de observerte verdiene i 2c).
(Hint: Bruk tilnærming til normalfordelingen)

Oppgave 3

Vi skal anta at antall branner, X, i et år er Poissonfordelt med punktsannsynligheter gitt ved

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\dots$$

a) Anta at $\lambda=10$. Hva er sannsynligheten for at det skal bli høyst 10 branner i et år? Finn sannsynligheten for at $4\le X\le 10$?

b) Vis at momentgenererende funksjon for X er $M_X(t)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$. [Hint: Bruk at $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$]. Bruk dette til å finne forventing og varians til X uttrykt ved λ.

Oppgave 4

Et fly er savnet. Flyet må ha styrtet i en av tre regioner og en antar at det er samme sannsynlighet for at det er i hver region. La $\beta_i,\ i$=1,2,3 være sannsynligheten for at flyet blir funnet i et søk i den i-te regionen når flyet faktisk er i den regionen. $1-\beta_i$ er da sannsynligheten for at søket i region i er mislykket gitt at flyet er i region *i*.

a) Hva er sannsynligheten for at flyet blir funnet?
Vis at sannsynligheten for at et søk i region 1 skal være mislykket er $1-\frac{\beta_1}{3}$.

b) Hva er sannsynligheten for at flyet er i region 1 gitt at et søk i region 1 er mislykket? Hva er sannsynlighetene for at flyet er i henholdsvis region 2 og 3 gitt at et søk i region 1 er mislykket? Kommenter svarene du fikk.