NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
ST1101/ST6101 Sannsynlighetsregning og statistikk

Faglig kontakt under eksamen: Thea Bjørnland

Tlf: 41123849

Eksamensdato: 5. juni 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Tabeller og formler i statistikk, Akademika,
K. Rottman: Matematisk formelsamling, Spektrum forlag,
Bestemt, enkel kalkulator,
Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

A_1 og A_2 er to hendelser i utfallsrommet S slik at $A_1 \cup A_2 = S$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ og $\mathrm{P}(A_1) = 0.5$.

a) Finn $\mathrm{P}(A_2)$ og $\mathrm{P}(A_1|A_2)$.

Er A_1 og A_2 uavhengige hendelser?

Er A_1 og A_2 disjunkte?

La også B være en hendelse i S slik at $\mathrm{P}(B|A_1) = 0.8$ og $\mathrm{P}(B|A_2) = 0.6$.

b) Finn $\mathrm{P}(B)$.

Finn $\mathrm{P}(A_1|B)$.

Oppgave 2

X og Y er kontinuerlige stokatiske variabler med simultantetthet

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\,x\,y & \text{for } 0 \le x \le 2, \text{ og } 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der k er en konstant.

a) Hva må k være for at $f_{X,Y}(x,y)$ skal oppfylle kravene til en simultantetthet?

La R være et kvadrat med hjørner i $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$ og $(3,3)$.

Finn $\mathrm{P}(X, Y \in R)$.

Marginaltettheten til X er gitt ved

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{for } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

b) Regn ut $\mathrm{E}(X)$ og $\mathrm{E}(X^2)$ og vis at $\mathrm{Var}(X) = 0.22$.

Finn marginaltettheten $f_Y(y)$. Er X og Y uavhengige?

Oppgave 3

Busselskapet AtilÅ sitt kundesenter er åpent hver dag fra klokka 07:00 til 19:00. Kunder som vil ha hjelp med *billettkjøp* ankommer kundesenteret ifølge en Poissonprosess med rate 5 per time. La X være antallet slike kunder som ankommer i løpet av en time slik at

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{5^x e^{-5}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Hva er sannsynligheten for at det ikke kommer en eneste kunde som trenger hjelp med billetkjøp mellom klokken 07:00 og 08:00?

Hva er sannsynligheten for at det kommer minst 20 kunder som trenger hjelp med billettkjøp før klokka 10:00?

La T være tiden fra kundesenteret åpner frem til fjerde kunde som vil ha hjelp med billettkjøp ankommer. Hvilken fordeling har T? Skriv ned $\mathrm{E}(T)$ og forklar tolkningen av dette tallet.

Kunder som vil ha hjelp med *ruteplanlegging* ankommer kundesenteret ifølge en Poisson-prosess med rate 10 per time. La Y være antallet slike kunder som ankommer i løpet av en time. Det er rimelig å anta X og Y er uavhengige.

Kostnaden for kundesenteret for å betjene en kunde som vil ha hjelp med *billettkjøp* er 150 kr, mens kostnaden for å betjene en kunde som vil ha hjelp med *ruteplanlegging* er 100 kr.

b) Hvilken fordeling har $X + Y$? Hva er parameteren i denne fordelingen?

Bevis svaret ditt ved å bruke regler for momentgenererende funksjoner.

Hva blir forventet kostnad for disse to kundetypene i løpet av en dag?

Vi ser på *alle* typer av kunder under ett, og antar kunder ankommer kundesenteret ifølge en Poissonprosess med rate λ (per time). Parameteren λ er ukjent. La W_i betegne antall besøkende kunder mellom klokka 07:00 og 19:00 på dag i.

Tabellen viser observasjoner av W_i på fem ulike dager.

Dag (i)	1	2	3	4	5
Antall kunder (w_i)	246	237	235	234	223

c) Utled uttrykket for sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren $\hat{\lambda}$ basert på et tilfeldig utvalg $W_1, \ldots, W_5$.

Vis at $\hat{\lambda}$ er forventningsrett og finn variansen til $\hat{\lambda}$.

Finn et tallestimat for λ basert på observasjonene i tabellen.

Oppgave 4

Per og Kari har invitert fire venner til taco.

a) Per og Kari regner med at de trenger 400 gram avokado til guacamole. De vet at vekten til en avokado er normalfordelt med forventningsverdi 90 gram og standardavvik 10 gram. Hva er det minste antallet avokadoer Per og Kari kan kjøpe for å være 95% sikre på at de har minst 400 gram avokado?

Hint: prøv deg frem med ulike antall avokadoer.

Til dessert spiser de seks vennene Non Stop (fargede sjokoladeknapper). Non Stop produseres i 6 ulike farger; brun, sort, gul, oransje, grønn og rød. Sjokoladefabrikken produserer Non Stop slik at sannsynligheten for at Non Stop får en gitt farge er konstant og uavhengig av andre Non Stop.

Sannsynligheten for at en Non Stop får fargen brun er p. La X være antall brune Non Stop i et tilfeldig utvalg av n Non Stop.

b) Hvilken fordeling kan vi anta at X har?

Dersom $p = 1/6$ og $n = 100$, finn (tilnærmet) $\mathrm{P}(X \geq 26)$.

Kari mener at det produseres en like stor andel av hver farge ($p = 1/6$), mens Per mistenker at det produseres en større andel brune Non Stop ($p > 1/6$).

c) Anta at vennene ser på et tilfeldig utvalg av $n = 100$ Non Stop og vil teste Pers påstand med signifikansnivå 0.05. Skriv ned nullhypotese og alternativhypotese, testobservator og forkastningsområde.

De seks vennene teller gjennom 100 Non Stop og finner 26 brune. Hva blir utfallet av hypotesetesten?