Løsningsforslag ST1101/ST6101 vår 2018

Oppgave 1

a) Siden A_1 og A_2 danner en partisjon av utfallsrommet, så er

$$\mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_1^c) = 1 - \mathrm{P}(A_1) = 0.5.$$

Siden $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0$ så er

$$\mathrm{P}(A_1|A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_2)} = 0.$$

A_1 og A_2 er ikke uavhengige ($\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) \neq \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)$). A_1 og A_2 har ingen enkeltutfall til felles og er derfor disjunkte ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$).

b) Fra loven om total sannsynlighet vet vi at

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A_1)\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(B|A_2)\mathrm{P}(A_2) = (0.8 + 0.6) \cdot 0.5 = 0.7.$$

Fra Bayes' regel finner vi

$$\mathrm{P}(A_1|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_1)\mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.7} = 0.5714.$$

Oppgave 2

a) Kravene til simultantetthet er (1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ og
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$.

I dette tilfellet må k oppfylle

$$k \int_0^4 \int_0^2 x\, y\, dx\, dy = 1.$$

Dermed finner vi at

$$k \int_0^4 y \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 dy = k \cdot 2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^4 = k \cdot 16 = 1$$

og $k = 1/16$.

Videre er

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X, Y \in R) &= \int \int_R f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^2 k\, x\, y\, dx\, dy \\ &= k \cdot 2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^3 = k \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{16} = 0.5625.\end{aligned}$$

b) Generelt er $\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$. Derfor er

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^2 x\, \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1.3333,$$
$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^2 x^2\, \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\left[x^4\right]_0^2 = \frac{16}{8} = 2.$$

Ved å sette inn i formel for varians finner vi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 2 - \frac{4^2}{3^2} = 0.22.$$

Marginaltettheten til Y er

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{16}\, x\, y\, dx = \frac{1}{16} y \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{y}{8}.$$

Ja, X og Y er uavhengige siden $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Oppgave 3

a) For tidsintervallet 07:00 til 08:00 ser vi på punktsannsynligheten $\mathrm{P}(X=0)$:

$$\mathrm{P}(X=0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0.0067.$$

For tidsintervallet 07:00 til 10:00 ser vi på en Poissonfordelt variabel X_3 med parameter $5 \cdot 3 = 15$:

$$P(X_3 = x) = \frac{15^x e^{-15}}{x!}.$$

Fra tabell side 20, ser vi at $P(X_3 < 20) = P(X_3 \leq 19) = 0.8752$ slik at $P(X_3 \geq 20) = 1 - 0.8752 = 0.1248$.

T er tiden til suksess nummer 4 i en Poissonprosess med rate $\lambda = 5$, altså er T Gammafordelt med parametere $\lambda = 5$ og $r = 4$. Hvis vi bruker parametriseringen i heftet (side 28) så er $\alpha = 4$ og $\beta = \frac{1}{\lambda} = 0.2$. Forventningsverdi $\mathrm{E}(T) = \frac{r}{\lambda} = 0.8$ timer, altså $60 \cdot 0.8 = 48$ minutter.

Forventningsverdien $\mathrm{E}(T) = 0.8$ er gjennomsnittlig tid (i timer) til hendelse nummer 4, når vi tar gjennomsnitt over veldig mange observasjoner (dager). Dersom vi hver dag i mange dager registrerer tidspunktet da den fjerde kunden som vil ha hjelp med billettkjøp ankommer, så vil gjennomsnittet av disse tidspunktene være 07:48.

b) $X + Y$ er Poissonfordelt med parameter $5 + 10 = 15$.

Dette kan vises ved hjelp av momentgenererende funksjoner ved å bruke at

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

når X og Y er uavhengige. Vi vet (side 25 i blått hefte) at $M_X(t) = e^{5(e^t-1)}$ og $M_Y(t) = e^{10(e^t-1)}$. Da er

$$M_{X+Y}(t) = e^{5(e^t-1)} e^{10(e^t-1)} = e^{5(e^t-1)+10(e^t-1)} = e^{15(e^t-1)},$$

som vi kjenner igjen som den momentgenererende funksjonen til en Poisson-fordelt stokastisk variabel med parameter 15.

La X_{12} og Y_{12} være totalt antall betjente kunder av type X og Y i løpet 12 timer. Forventet kostnad for de to kundegruppene er

$$\mathrm{E}(150X_{12} + 100Y_{12}) = 150\mathrm{E}(X_{12}) + 100\mathrm{E}(Y_{12}) = 150 \cdot 12 \cdot 5 + 100 \cdot 12 \cdot 10 = 21000.$$

c) Hver dag er kundesenteret åpent i 12 timer. Det vil si at W_i er Poissonfordelt med parameter 12λ. Rimelighetsfunksjonen for 5 uavhgengige observasjoner $w_1, \dots, w_5$ er

$$L(\lambda; w_1, \dots, w_5) = \prod_{i=1}^{5} \frac{(12\lambda)^{w_i} e^{-12\lambda}}{w_i!}.$$

Vi ser på logaritmen (naturlig logaritme) til rimelighetsfunksjonen:

$$l(\lambda; w_1, \dots, w_5) = \sum_{i=1}^{5} \left(w_i \log(12\lambda) - 12\lambda - \log(w_i!) \right).$$

Vi finner $\hat{\lambda}$ som maksimerer dette uttrykket ved å derivere $l(\lambda)$ med hensyn på λ og setter dette til 0:

$$\frac{\partial l(\lambda; w_1, \dots, w_5)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{w_i}{\lambda} - 12 \right) = \sum_{i=1}^{5} \frac{w_i}{\lambda} - 60 = 0.$$

Sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for et tilfeldig utvalg $W_1, \dots, W_5$ er da

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{5} W_i}{60}.$$

Forventningsverdien til $\hat{\lambda}$ er

$$\mathrm{E}(\hat{\lambda}) = \frac{\sum_{i=1}^{5} \mathrm{E}(W_i)}{60} = \frac{5 \cdot 12\lambda}{60} = \lambda.$$

Dermed er $\hat{\lambda}$ forventningsrett.

Variansen til $\hat{\lambda}$ er

$$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}) = \frac{\sum_{i=1}^{5} \mathrm{Var}(W_i)}{60^2} = \frac{5 \cdot 12\lambda}{60^2} = \frac{\lambda}{60}.$$

Fra observasjonene i tabellen finner vi at $\sum_{i=1}^{5} w_i = 1175$, slik at estimatet vårt blir $\hat{\lambda} = 19.58$.

Oppgave 4

a) La n være antall avokadoer de kjøper inn, og la X_n være vekten til disse n avokadoene. Da er $X_n \sim N(n \cdot 90, n \cdot 10^2)$, altså normalfordelt med forventningsverdi $n \cdot 90$ gram og standardavvik $\sqrt{n} \cdot 10$ gram. Vi ønsker å finne den minste n slik at $P(X_n \geq 400) \geq 0.95$. På standard form:

$$P(X_n \geq 400) = 1 - P(X_n \leq 400) = 1 - P(Z \leq \frac{400 - n \cdot 90}{\sqrt{n} \cdot 10}) \geq 0.95.$$

Allerede nå kan vi prøve ulike verdier av n. $n = 4$ gir $1 - P(Z \leq 2) = 0.0228$, $n = 5$ gir $1 - P(Z \leq -2.24) = 0.9875$. Dermed er svaret $n = 5$.

b) X er binomisk fordelt med parametere n og p. For $n = 100$ og $p = 1/6$ kan vi bruke normaltilnærmingen til binomisk fordeling. La Y være en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi $np = 100/6$ og varians $np(1-p) = 100\frac{1}{6}\frac{5}{6}$.

Med kontinuitetskorreksjon:

$\mathrm{P}(X \geq 26) \approx \mathrm{P}(Y \geq 25.5) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 25.5) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq \frac{25.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = 1 - \Phi(2.37) = 1 - 0.9911 = 0.0089.$

Uten kontinuitetskorreksjon:

$\mathrm{P}(X \geq 26) \approx \mathrm{P}(Y \geq 26) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 26) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq \frac{26-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = 1 - \Phi(2.50) = 1 - 0.9938 = 0.0062.$

Uten kontinuitetskorreksjon (2):

$\mathrm{P}(X \geq 26) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 25) \approx 1 - \mathrm{P}(Y \leq 25) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq \frac{25-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = 1 - \Phi(2.24) = 1 - 0.9875 = 0.0125.$

c)

$$H_0 : p_1 = 1/6, \quad H_1 : p_1 > 1/6$$

Testobservatoren er

$$T = \frac{X - 100 \cdot 1/6}{\sqrt{100 \cdot 1/6 \cdot (1 - 1/6)}} = \frac{X - 100/6}{\sqrt{500/36}}$$

Vi forkaster H_0 dersom vi observerer $t > z_\alpha = 1.645$.

Vi observerer $x = 26$ og dermed $t = 2.5$. Vi forkaster H_0 til fordel for H_1 siden $t > 1.645$