

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **ST1101/ST6101 Sannsynlighetsregning og statistikk**

Faglig kontakt under eksamen: Professor Gunnar Taraldsen

Tlf: 46432506

Eksamensdato: 24.mai 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00 – 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Tabeller og formler i statistikk, Akademika

K. Rottman: Matematisk formelsamling

Bestemt, enkel kalkulator

Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater

Annen informasjon:

Alle svar må begrunnes.

Du må ha med nok mellomregninger til at tenkemåten din klart fremgår.

Opgaven består av 20 delpunkter som har lik vekt ved sensur.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig 2-sidig

sort/hvit farger

skal ha flervalgskjema

Dato

Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.



Figur 1: En tegnestift kan havne med spissen opp eller ikke.

Oppgave 1 La et eksperiment Y bestå i å knipse en tegnestift n ganger og registrere for hver gang om den blir liggende med spissen opp eller ikke som illustrert i Figur 1.

- a) Hva er utfallsrommet til eksperimentet?
- b) Et utfallsrom er en mengde. Hva må spesifiseres i tillegg for å kunne si at en mengde er et utfallsrom?
- c) Definer og begrunn en sannsynlighetsmodell for eksperimentet Y .
- d) Anta at sannsynligheten for at spissen havner opp er $\theta = 40\%$. Forklar hvordan store talls lov kan brukes til å forklare hva dette betyr.
- e) Forklar hvorfor det er rimelig å anta $H_1 : \theta < 50\%$ ut i fra Figur 1.
- f) La X være antall ganger tegnestiften havner med spissen opp i eksperimentet Y . Gi en begrunnelse for at X er en stokastisk variabel.
- g) Anta at $n = 10$ og at eksperimentet gir $x = 4$. Utled og utfør en rimelighetstest med beregning av p-verdi for å undersøke om nullhypotesen $H_0 : \theta \geq 50\%$ kan forkastes. Hint: Utled rimelighetsestimatoren $\hat{\theta}_0$ gitt H_0 .
- h) Hva er sannsynligheten for å gjøre en type II feil i den foregående testen når $\theta = 40\%$. Hint: Velg nivå 5% og forkast H_0 når x er liten.
- i) Hvor stor må n være for at en test med nivå 5% som i forrige punkt skal gi en teststyrke større enn 90% for $\theta = 40\%$. Hint: Bruk sentralgrenseteoremet.
- j) Skisser grafen til styrken til testen utledet i forrige punkt som en funksjon av θ .



Figur 2: Koboltblått glass.

Oppgave 2 Blaaifarveværket på Modum var Norges største industribedrift på 1800-tallet, og utviklet blåfarge fra koboltmalm, som ble benyttet i papir-, porselens- og glassindustrien. Grunnstoffet kobolt **Co** kan brukes som fargestoff ved farging av glass som i Figur 2. En skal undersøke forekomsten av kobolt i et område og har derfor tilfeldig valgt ut n like store jordprøver og bestemt koboltinnholdet Y_1, \dots, Y_n målt i mg i disse. Anta at dette er et tilfeldig utvalg fra en eksponentialfordeling med skalaparameter μ .

- a) Beregn sannsynligheten $P(Y_1 > 2 \text{ mg})$ når $\mu = 4 \text{ mg}$.
- b) Beregn den forventede mengde kobolt i en prøve og forklar hva dette betyr.
- c) Hvis vi fjerner prøver som inneholder mindre enn 2 mg kobolt, hva er da sannsynligheten for at en prøve inneholder mindre enn 4 mg kobolt når $\mu = 4 \text{ mg}$.
- d) Hva blir den forventede mengde kobolt i en prøve som i forrige punkt?
- e) Vis at $X = \bar{Y}$ er rimelighetsestimatoren til μ .
- f) Vis at X er gammafordelt ved å bruke momentgenererende funksjon.
- g) Anta at observasjonene gir $x = 5.2 \text{ mg}$ for $n = 50$. Finn usikkerheten i denne målingen.
- h) Beregn et 95% konfidensintervall for μ gitt observasjonen i forrige punkt. Hint: En χ^2 -fordelt variabel har gammafordeling.
- i) Anta at jordprøver fra lignende steder gir grunnlag for å anta en gamma prior fordeling for $\theta = 1/\mu$ med formparameter α og skalaparameter β . Vis at posterior fordeling også er en gammafordeling.
- j) Finn minste kvadrat Bayes estimat av θ og diskuter kort effekten av forhåndskunnskapen gitt av α og β .