① ST1101/ST6101 mai 2019

a) $\Omega_Y = \{0,1\}^n$. Alle delmengder er hendelser.

$y_i = 1$ dersom spissen havner opp i knips nummer i.
$\quad = 0$ hvis ikke.

b) Delmengdene som er hendelser må spesifiseres. Ω_Y inneholder eksperimentets enkeltutfall.

c) En sannsynlighetsmodell $(\Omega_Y, \mathcal{E}_Y, P_Y)$ er gitt ved:

$$Y_1, \dots, Y_n \underset{u}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta)$$

hvor $\theta \in \Omega_\theta = [0,1]$. Da er:

$$P_Y(A) = \sum_{y \in A} f_Y(y) \quad \text{hvor tettheten}$$

$$f_Y(y) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{y_i} \cdot (1-\theta)^{1-y_i} \quad \text{p.g.a. uavhengighet.}$$

Enhver $A \subset \Omega_Y$ er en hendelse, d.v.s.

$$\mathcal{E}_Y = \{A \mid A \subset \Omega_Y\}$$

d) Store talls lov gir

$$\lim_{n \to \infty} \bar{Y} = \theta$$

d.v.s. at relativt antall knips som gir spissen opp konvergerer mot sannsynligheten 40% når $n \to \infty$.

e) Ved null lengde på spissen vil det være tilnærmet symmetri og 50% sannsynlighet for hvert av utfallene. Ved økende lengde avtar sannsynligheten for å havne med spissen opp fordi den flate siden minsker relativt til andre dimensjoner, og dette begrunner hypotesen

$$H_1 : \theta < 50\%$$

f) $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ er en reell funksjon av data Y og

$$(X \leq x) = \{\omega \mid Y_1(\omega) + \cdots + Y_n(\omega) \leq x\}$$

er alltid en hendelse fordi

$A = \{y \mid y_1 + \cdots + y_n \leq x\}$ er en hendelse i Ω_{Y_1}.

$(X \leq x) = (Y \in A) = \{\omega \mid Y(\omega) \in A\}$

er en hendelse for enhver $A \subset \Omega_Y$ per antagelse.

Tilsammen er da $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slik at $(X \leq x)$ er en hendelse for enhver $x \in \mathbb{R}$, d.v.s. X er en stokastisk variabel.

($X \sim$ binomisk (n, θ) er en konsekvens, men oppgaven spør ikke om dette.)

g) Det vises under at rimelighetstesten er gitt ved å forkaste H_0 når X er liten:

$$\text{p-verdi} = \sup_{\theta \in H_0} P^{\theta}(X \leq x)$$

$$= P(X \leq 4 \mid \theta = 50\%)$$

$$= \sum_{x=0}^{4} \binom{10}{x} = 0{,}377 \quad \text{(tabell s. 13)}$$

): H_0 forkastes ikke ved nivå $\alpha = 5\%$

(men ved nivå 40%, som vil være et uvanlig valg av nivå fordi sannsynligheten for type I feil da er alt for stor)

$\hat{\theta}_0$ er gitt ved å maksimalisere $\theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x}$ for $1/2 \le \theta \le 1$.
På hele intervallet $[0,1]$ er maksimalpunktet for $\theta = \hat{\theta} = x/n$.
Dermed er

$$\hat{\theta}_0 = \begin{cases} \hat{\theta} & \text{når } \hat{\theta} \ge 1/2 \\ 1/2 & \text{når } \hat{\theta} < 1/2 \end{cases}$$

Rimeligheten $\lambda = \hat{L}_0 / \hat{L} = 1$ når $\hat{\theta} \ge 1/2$ og for $\hat{\theta} < 1/2$ ($p = \hat{\theta}$, $q = 1-p$):

$$\lambda^{-1} = (2p)^{np} \cdot (2q)^{nq}$$

som er monotont avtagende i p for små p:

$$(p \ln p + q \ln q)'$$

$$= \ln p + 1 - \ln q - 1$$

$$= \ln \frac{p}{q} < 0 \quad \text{når } p < q$$

$): \lambda$ liten $\Leftrightarrow p = \hat{\theta}$ liten

$\Leftrightarrow x$ liten

h) Vi velger nivå $\alpha = 5\%$. Ut i fra tabell på side 13 er forkastnings-området da $X \in \{0, 1\}$.
(Nivået blir da faktisk og 1.1%, mens området $\{0, 1, 2\}$ vil gi nivå 5,5%)

$$P(X \leq 1 \mid \theta = 40\%) = 4{,}6\%$$

$):$ Sannsynlighet for type II feil $= \underline{\underline{95{,}4\%}}$

i) Styrkefunksjonen approksimert ved sentralgrenseteoremet:

$$\text{Pow}(\theta) = P^{\theta}(\bar{Y} \leq q) \cong P(\theta + \sigma Z \leq q)$$

$$= P\left(\frac{\theta - q}{\sigma} \leq Z\right), \quad Z \sim N(0,1), \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\theta \cdot (1-\theta)$$

$\text{Pow}(\theta_1) = \beta_1$ og $\text{Pow}(\theta_0) = \beta_0$ gir 2 ligninger for de ukjente q og n:

$$\sqrt{n} \cdot (\theta_1 - q)/\sqrt{\theta_1 \cdot (1-\theta_1)} = z_1 = z_{5\%} \approx 1{,}645$$

$$\sqrt{n} \cdot (\theta_2 - q)/\sqrt{\theta_2 \cdot (1-\theta_2)} = z_2 = z_{90\%} = -z_{10\%} \approx -1{,}282$$

$$1/\sqrt{n} = (\theta_1 - q)/[z_1\sqrt{\theta_1 \cdot (1-\theta_1)}]$$

$$= (\theta_2 - q)/[z_2\sqrt{\theta_2 \cdot (1-\theta_2)}]$$

$$\theta_1/[z_1\sqrt{\theta_1 \cdot (1-\theta_1)}] - \theta_2/[z_2\sqrt{\theta_2 \cdot (1-\theta_2)}]$$

$$= q \cdot \{1/[z_1\sqrt{\theta_1 \cdot (1-\theta_1)}] - 1/[z_2\sqrt{\theta_2 \cdot (1-\theta_2)}]\}$$

$$q = [w_1\theta_1 + w_2\theta_2]/(w_1 + w_2) \approx 44{,}32973\%$$

$$w_1 = \frac{1}{z_1\sqrt{\theta_1 \cdot (1-\theta_1)}} = \frac{1}{1{,}645 \cdot 0{,}5} \approx 1{,}21581$$

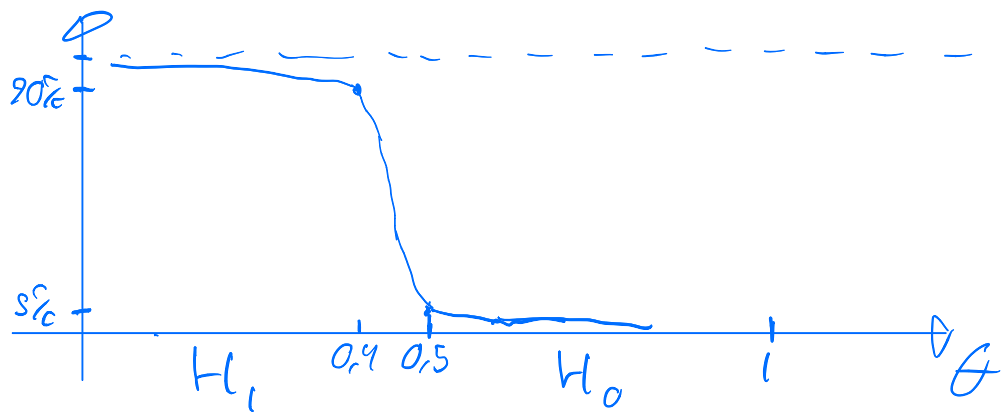
$$w_2 = \frac{1}{1{,}282\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}} \approx 1{,}59223$$

i) $n = z_1^2 \cdot \theta_1 \cdot (1-\theta_1)/(\theta_1 - q)^2$

$\approx 1{,}645^2 \cdot 0{,}25 / (0{,}5 - 0{,}4432973)^2$

$\approx 210{,}41$ $\Rightarrow$: $n \geq 211$

j)



(2) $\int_x^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_x^\infty = e^{-x}$

a) $P(Y_1 > 2\,mg) = P(\mu T > y) = e^{-\frac{2}{4}} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 61\%$

b) $E(Y_1) = \mu$ $(=4\,mg)$ Fordelingen til Y_i har forv. verdi μ. Ved mange målinger vil da $\bar{Y}_i \to \mu$, d.v.s. snittet av mange målinger er nær μ. Hver enkelt måling trenger ikke være nær μ.

c) $P(Y_1 < \mu \mid Y_1 > \mu_0) = P(T < 1 \mid T > \mu_0/\mu)$

$= [e^{-1/2} - e^{-1}]/e^{-1/2} = 1 - e^{-1/2} \approx 39\%$

Obs: $Y_1 - \mu_0 \mid (Y_1 > \mu_0)$ er eksponentielt fordelt, jf. kjent egenskap for ventetider :-)

d) $E(Y_1 \mid Y_1 > \mu_0) = \mu_0 + \mu = 6\,mg$

e) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu} e^{-y_i/\mu} = \mu^{-n} \cdot e^{-n x/\mu}$

$= [x/\mu \cdot e^{-x/\mu}]^n \cdot x^{-n}$ har maksimum ved $x/\mu = 1$, jf. $x \cdot e^{-x}$ som har maks. ved 1.

): $\hat{\mu} = X$ er rimelighetsestimat.

f) $Y_i/n \sim \text{Gamma}(1, \mu/n)$ gir

$$X = \sum_i \frac{Y_i}{n} \sim \text{Gamma}(n, \mu/n)$$

Momentgenererende bevis:

$$E(e^{t\Sigma G_i}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tG_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1-\beta t)^{-\alpha_i} = (1-\beta t)^{-\Sigma\alpha_i}$$

): $G_i \underset{u}{\sim} \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$

$$\Rightarrow \Sigma G_i \sim \text{Gamma}(\Sigma\alpha_i, \beta)$$

g) $\text{Var } X = n \cdot (\mu/n)^2$, $\text{Std } X = \mu/\sqrt{n}$

): Standard usikkerhet:

$$u = x/\sqrt{n} = \frac{5{,}2\,\text{mg}}{\sqrt{50}} \approx 0{,}74\,\text{mg}$$

h) Et approksimativt intervall er gitt ved $(5{,}2 \pm 1{,}4)$ mg $= 5{,}2(1{,}4)$ mg.

$$X \sim \text{Gamma}(n, \theta/n)$$
$$= \text{Gamma}((2n)/2, 2) \cdot \theta/(2n)$$
$$= \chi^2_{2n} \cdot /(2n)$$

$$95\% = P\left(\chi^2_{97{,}5\%,2n} \le 2n \cdot \frac{X}{\mu} \le \chi^2_{2{,}5\%,2n}\right)$$

$$): [\hat{\mu}_a, \hat{\mu}_b] = 100 \cdot 5{,}2\,\text{mg} \cdot \left[\frac{1}{129{,}561}, \frac{1}{74{,}222}\right]$$
$$\approx [4;7]\,\text{mg}$$

(versus appr. $[3{,}8 ; 6{,}6]$ mg)

i) $$\pi(\theta \mid x) \sim \theta^{\alpha-1} \cdot e^{-\theta/\beta} \cdot e^{-x \cdot n\theta} \cdot \theta^{n}$$
$$= \theta^{(n+\alpha)-1} \cdot e^{-\theta \cdot (nx+\beta^{-1})}$$

$$): \quad \Theta \mid x \sim \text{Gamma}\left(n+\alpha, (nx+\beta^{-1})^{-1}\right)$$

j) $\hat{\theta}_B = (n+\alpha)/(nx+\beta^{-1}) \to \frac{1}{x}$ når $n \to \infty$ eller $\alpha \to 0, \beta \to \infty$.

$\alpha\beta$ og $\alpha\beta^2$ er prior middel og varians for θ.