NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
ST1101/ST6101 Sannsynlighetsregning og statistikk

Faglig kontakt under eksamen: Professor Gunnar Taraldsen
Tlf: 46432506

Eksamensdato: 9.mai 2020
Eksamenstid (fra–til): 09:00 – 13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A

Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:

Alle svar må begrunnes.

Du må ha med nok mellomregninger til at tenkemåten din klart fremgår.

Oppgaven består av 20 delpunkter som har lik vekt ved sensur.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☐	**farger** ☒
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Et skadeforsikringsselskap regner med at erstatningsbeløpet X ved en type skader har følgende fordeling:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 - (a/x)^3, & x \geq a \end{cases} \tag{1}$$

hvor $a = 1000$ kroner.

a) Finn sannsynlighetstettheten f til X.

b) Hvor stort beløp μ blir gjennomsnittlig utbetalt i erstatning?

c) Finn medianen $\tilde{\mu}$ til X og kommenter resultatet.

d) Finn sannsynligheten for at erstatningsbeløpet er større enn 10000 kroner.

e) Selskapet overveier å innføre en ny ordning der de erstatningsbeløp X som med den gjeldende ordning ville overstige 10000 kroner reduseres til en maksimalerststatning på 10000 kroner. Skisser den kumulative fordelingsfunksjonen til et tilfeldig valgt erstatningsbeløp etter nyordningen.

f) Hvor mye vil den gjennomsnittlige utbetalte erstatning bli redusert ved nyordningen?

g) I pensum er en *stokastisk variabel* definert som en funksjon. Forklar hvordan dette henger sammen for den stokastiske variabelen X ved å definere passende utfallsrom.

h) I pensum inngår begrepet *hendelse*. Forklar dette begrepet og gi tre ulike eksempel på hendelser hvor du bruker den *stokastiske variabelen* X.

i) Bruk eksempelet gitt av denne oppgaven til å vise at det finnes stokastiske variabler som hverken har kontinuerlig eller diskret fordeling.

j) Median og forventningsverdi til X er begge mulige gjetninger på verdien til et tilfeldig valgt erstatningsbeløp. Gi begrunnelser for dette.

Figur 1: Et sykkelkjede.

Oppgave 2 Et sykkelkjede består av metall-ledd som vist i Figur 1. Hvert ledd har en bruddstyrke X som er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x \mid \beta) = \frac{2x}{\beta} e^{\frac{-x^2}{\beta}}, \quad x > 0 \tag{2}$$

der β er en ukjent positiv konstant som karakteriserer bruddstyrkekvaliteten. Når n slike tilfeldig valgte ledd med bruddstyrker henholdsvis $X_1, \ldots, X_n$ settes sammen til et kjede så antas bruddstyrken Y av kjeden å være lik den minste av X'ene.

a) Finn fordelingen $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$ til X.

b) Vis at X^2 har eksponentialfordeling med skalaparameter β: $X^2 \sim \mathrm{Exp}(\beta)$.

c) Begrunn at $X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \mathrm{Gamma}(n, \beta)$.

d) Vis at bruddstyrken Y har sannsynlighetstetthet $g(y \mid \beta) = f(y \mid \beta/n)$.

e) Vis at $2nY^2/\beta$ er χ^2-fordelt med 2 frihetsgrader.

f) Konstanten β skal estimeres på grunnlag av $X_1, \ldots, X_n$. Vis at rimelighetsestimatoren blir $\hat{\beta} = (\sum_i X_i^2)/n$.

g) Sammenlign $\hat{\beta}$ med estimatoren $\beta^* = nY^2$.

h) Anta at en ønsker et konfidensintervall for β med konfidenskoeffisient $(1-\alpha)$. Utled et approksimativt konfidensintervall med utgangspunkt i $\hat{\beta}$ og sentralgrenseteoremet.

i) Hvor stor må n være for at den forventede lengde av intervallet basert på $\hat{\beta}$ høyst skal bli β når $\alpha = 5\%$.

j) Utled rimelighetstesten for $H_0 : \beta = \beta_0$ og bruk dette til å utlede konfidensintervall for β. (rimelighetstesten = The generalized likelihood ratio test)