1

a) $f(x) = (x>a)\cdot(1-a^3x^{-3})'$

$= (x>a)\cdot 3a^3x^{-4}$

b) $\mu = EX = \int_a^\infty 3a^3 x^{-3}\,dx$

$= 3a^3 \frac{1}{-2} x^{-2}\Big|_a^\infty = \frac{3}{2}a$ 1500 kr

c) $\frac{1}{2} = 1-(a/x)^3 \Rightarrow \frac{a}{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

$\Rightarrow \tilde{\mu} = 2^{1/3}\cdot a \approx 1259{,}92$ kr $\neq \mu$

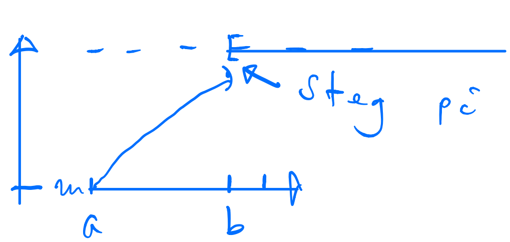
fordi fordelingen ikke er symmetrisk.
Det er to ulike mål på lokalisering.

d) $b = 10000$ kr, $P(X>b) = 1-F(b)$

$= (a/b)^3 = (1/10)^3 = 10^{-3}$

$p_b = 0{,}001$

e)



Steg på 10^{-3}. Tegnet større for synlighet.

f) $\mu_n = E(X_n) \overset{(*)}{=} \int_a^b x \cdot f(x)\,dx + p_b \cdot b$

$\Rightarrow \mu - \mu_n = \int_b^a x \cdot f(x)\,dx - p_b \cdot b$

$= \frac{3}{2} \frac{a^3}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot b = \frac{1}{2} \frac{a^3}{b^2} = 5 \text{ kr}$

$\int_b^\infty x \cdot 3a^3 x^{-4}\,dx = \frac{3}{-2} x^{-2} \cdot a^3 \Big|_b^\infty = \frac{3}{2} \frac{a^3}{b^2}$

(*) kan begrunnes ved:

$E(X_n) = E(X_n \mid X_n < b) \cdot P(X_n < b)$

$+ E(X_n \mid X_n = b) \cdot P(X_n = b)$

og $X_n \mid X_n < b \sim (a < x < b) \cdot f(x) \cdot p_b$

g) La Ω være underliggende utfallsrom og la $\Omega \to \mathbb{R}$ med standard hendelsesfamilie. Da er

$X : \Omega \to \Omega_X$

slik at $F(x) = P(X \le x) = P\{\omega \mid X(\omega) \le x\}$

h) $(X = \mu)$ er hendelsen tilsvarende at erfaringen $= \mu$. Den har sannsynlighet 0 her.

$(X > b)$ —"— erfaringen $> b$. Den har sannsynlighet p_b.

$(X > a)$ —"— $> a$. Den har sannsynlighet 1.

Generelt er familien $\mathcal{E}$ av hendelser slik at

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$: Den umulige/tomme hendelsen.

(ii) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$: Det motsatte av hendelsen A er en hendelse A^c.

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

En tellbar union av hendelser er en hendelse (= minst en av hendelsene inntreffer)

Det følger som konsekvens at $\bigcap_{i=1} A_i$ er en hendelse (alle inntreffer).

Alle hendelser er mengder,
men alle mengder er ikke hendelser.

i) X_n har standard fordeling. Den
er hverken kontinuerlig eller diskret.

ii) Begge er lokaliseringsparametre,
så dermed er de begge
mulige (gode) gjetninger

Bedre begrunnelse ved minimisering
av kvadratisk risikoen:

$$E(X-\mu)^2$$

og risikoen

$$E\left[\,|X-\hat{\mu}| - |X-\mu_0|\,\right]$$

som er forventet tap ved
to ulike vanlige valg for tap.

2

a) $F(x) = \int_0^x \frac{2x}{\beta} \cdot e^{-\frac{x^2}{\beta}} dx = -e^{-\frac{x^2}{\beta}} \Big|_0^x$

$= 1 - e^{-\frac{x^2}{\beta}}$

b) $w = x^2$, $dw = 2x\,dx$

$f(x)\,dx = \frac{dw}{\beta} \cdot e^{-w/\beta}$

$\Rightarrow$: $W \sim \text{Exp}(\beta)$

c) $X_i^2 \sim \text{Exp}(\beta) = \text{Gamma}(1, \beta)$

$\Rightarrow \sum X_i^2 \sim \text{Gamma}(n, \beta)$

fordi: $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 + \dots + 1 = n$.

d) Generelt for minste verdi:

$P(W_{(1)} \leq w) = 1 - P(W_{(1)} > w)$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_W(w)) = 1 - (1 - F_W)^n$

$f_{W_{(1)}}(w) = n \cdot (1 - F_W(w))^{n-1} \cdot f_W(w)$

Kan bruke a), men endlerd å

bruke $W \sim \mathrm{Exp}(\beta)$. Da er

$$F_W(w) = 1 - e^{-w/\beta}$$

$$\Rightarrow f_{W_{(1)}}(w) = \frac{n}{\beta} \cdot e^{-wn/\beta} \sim \mathrm{Exp}(\beta/n)$$

Sammenhengen fra b) i revers gir da at β erstattes av β/n, slik at

$$\underline{\underline{g(y \mid \beta) = f(y \mid \beta/n)}}$$

Obs: Minste $Y^2 = X_{(1)}^2 = W_{(1)}$!

e) $$2nY^2/\beta = 2n\, W_{(1)}/\beta$$

$$= \frac{2n}{\beta} \cdot \mathrm{Gamma}\left(1, \frac{\beta}{n}\right)$$

$$= \mathrm{Gamma}(1, 2) = \mathrm{Gamma}(\nu/2, 2)$$

$$\underline{\underline{= \chi^2(\nu) \quad \nu = 2}}$$

f) $$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\beta} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{\beta}} = \prod_{i=1}^{n}(2x_i) \cdot \beta^{-n} \cdot e^{\left(-\frac{\hat\beta}{\beta}\right)^n}$$

$$= \left[\frac{\hat\beta}{\beta} \cdot e^{-\frac{\hat\beta}{\beta}}\right]^n \cdot \hat\beta^{-n} \cdot \prod_{i=1}^{n}(2x_i)$$

her nås ved $\beta = \hat{\beta}$

fordi $x \cdot e^{-x}$
her nås ved $x = 1$.

g) $\hat{\beta} \sim \text{Gamma}(n, \beta/n)$ fra c.)

$\beta^* \sim \text{Gamma}(1, \beta/n) \cdot n$ fra d.)

$= \text{Gamma}(1, \beta)$

$E\,\hat{\beta} = E\,\beta^* = \beta$, så begge er forv. rette (sanne).

$\text{Var}\,\hat{\beta} = \frac{1}{n}\beta^2 < \beta^2 = \text{Var}\,\beta^*$,

så $\hat{\beta}$ er bedre.

β^* er faktisk like dårlig som å kun bruke X_1^2 ?

Men: I en gitt målesituasjon kan $X_{(1)}$ være enenkle tilgjengelige.

h) $\hat{\beta} \sim N(\mu, \sigma^2)$

med $\mu = E(\hat{\beta}) = \beta$ og $\sigma^2 = \frac{1}{n}\beta^2$.

$\hat{\beta} \pm k \cdot u$ med $u = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{\beta}$

og $k = z_{\alpha/2}$

i) $E(\text{lengde}) = 2\frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \beta \leq \beta \Rightarrow n \geq 16$

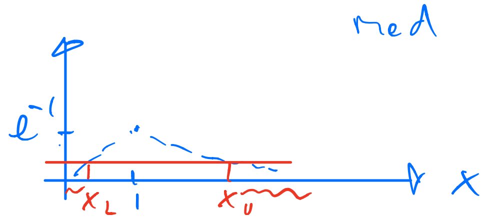
j) Regningen i f) gjør at vi kan regne som om

$$L(\beta) = \left[\frac{\hat{\beta}}{\beta} \cdot e^{-\frac{\hat{\beta}}{\beta}}\right]^n.$$

Rimeligheten blir:

$$\lambda = \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}} = \left[\frac{\hat{\beta}}{\beta_0} \cdot e^{-\frac{\hat{\beta}}{\beta_0}} \cdot e\right]^n$$

La $\varphi(x) = x \cdot e^{-x}$ som har graf med maks i $x = 1$.



Vi ser at λ liten tilsvarer $\hat{\beta}$ langt unna β_0 og kritisk område blir som indikert på x-aksen for $x = \hat{\beta}/\beta_0$. Konfidensintervall er gitt av de β_0 som ikke gir forkastning, så da er området gitt av de β_0 som er nær $\hat{\beta}$. Tilsammen gir dette to ligninger for de to ukjente grensene:

$$\hat{\beta}/\beta = G \sim \text{Gamma}(n, 1/n)$$

$$P(\varphi(G) > c) = 1 - \alpha$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x_L) = \varphi(x_U) \\ &P(x_L \leq G \leq x_U) = 1 - \alpha \end{aligned}\right\} \text{Gir } x_L \text{ og } x_U$$

$$= P\left(x_L \leq \frac{\hat{\beta}}{\beta} \leq x_U\right)$$

$$= P\left(\frac{\hat{\beta}}{x_U} \leq \beta \leq \frac{\hat{\beta}}{x_L}\right)$$

$\Rightarrow$ Konf. intervall $\left[\frac{\hat{\beta}}{x_U}, \frac{\hat{\beta}}{x_L}\right]$