Tema 3: Estimering og hypotesetesting kapittel 5 og 6

ST1101

Vår 2018

Observator og estimator

For et tilfeldig utvalg $X_1, \dots, X_n$ fra $p_X(x; \theta)$, så er

$$T(X_1, \dots, X_n)$$

en *observator*.

En *estimator* er en observator

$$\theta(X_1, \dots, X_n)$$

som brukes spesifikt til å anslå en parameter θ.

Når vi observerer $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ så regner vi ut et *estimat* $\hat{\theta}$ av parameteren θ.

Definisjon 5.2.1 (b)

For observasjonen $y_1, \dots, y_n$ av et tilfeldig utvalg $Y_1, \dots, Y_n$ fra $f_Y(y; \theta)$ så er **rimelighetsfunksjonen**

$$L(\theta; y_1, \dots, x_n) = f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_Y(y_i; \theta)$$

Definisjon 5.2.2

Sannsynlighetsmaksimeringsestimatet for θ er den verdien θ_e som oppfyller $L(\theta_e) \geq L(\theta)$ for alle θ.

Finn ved å

1. Finne makspunkt (derivasjon) av $L(\theta)$ eller $l(\theta)$
2. Identifiser ordningsvariabel som maksimerer $L(\theta)$

Sannsynlighetsmaksimeringsestimator

- $Y_1, \dots, Y_n$ tilfeldig utvalg
- $Y \sim f_Y(y; \theta)$
- Observasjoner $y_1, \dots, y_n$
- Finn θ som maksimerer **rimelighetsfunksjonen**

$$L(\theta; y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1} f_Y(y_i; \theta)$$

- ... eller logaritmen til rimelighetsfunksjonen

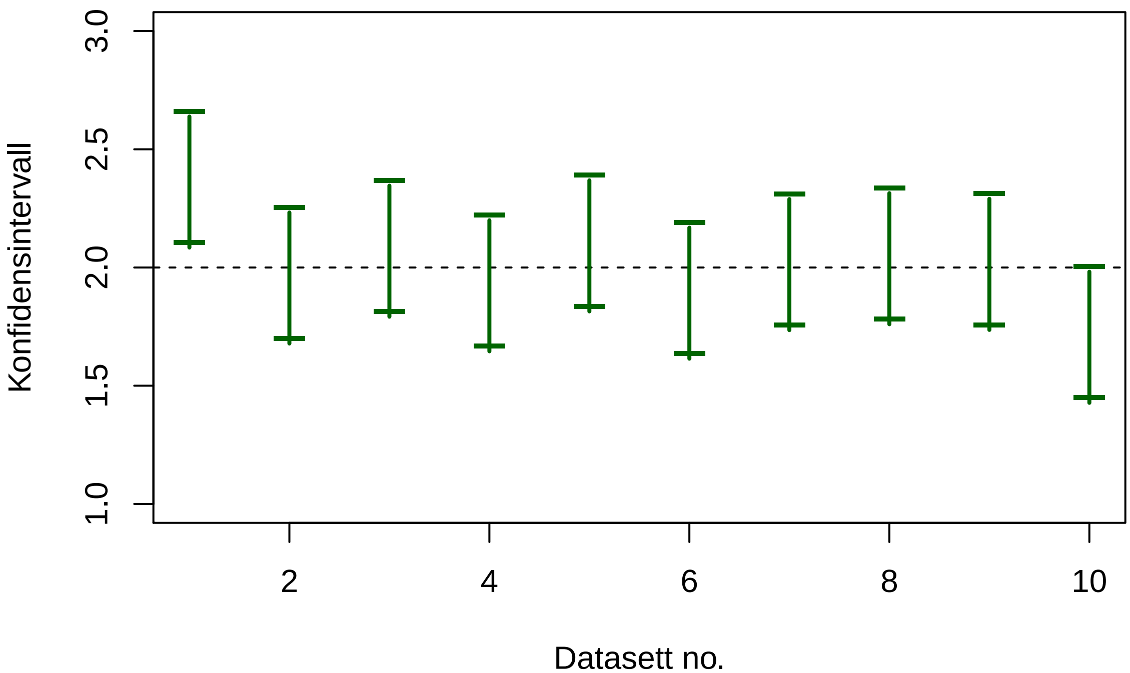
$$l(\theta) = \ln(L(\theta))$$

- Estimat (tallverdi): $\hat{\theta}(y_1, \ldots, y_n)$
- Estimator (stokastisk variabel): $\hat{\theta}(Y_1, \ldots, Y_n)$

Moment-metoden

Første moment $E(Y) = g_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, andre moment $E(Y^2) = g_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, og opp til $E(Y^s) = g_s(\theta_1, \ldots, \theta_s)$. Sett disse til å være lik de observerte momentene $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^j$, $j = 1, \ldots, s$. Dette gir s ligninger med s ukjente variabler. Når vi løser disse finner vi estimatorer for s ukjente parametere.

Konfidensintervall



Konfidensintervall for μ, σ^2 kjent

For et tilfeldig utvalg $Y_1, \ldots, Y_n$ fra en $N(\mu, \sigma^2)$-fordeling, så er et $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for μ gitt ved

$$\left[\bar{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}},\ \bar{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

der $z_{\alpha/2}$ er en *kritisk verdi* i standard normalfordelingen.

Konfidensintervall for p i binomisk fordeling

Teorem 5.3.1

For $Y \sim$ Binomisk(n,p), og n stor, så er et *estimert* $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for p gitt ved

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

der $z_{\alpha/2}$ er en *kritisk verdi* i standard normalfordelingen og $\hat{p} = Y/n$.

Hva er en god estimator?

En estimator $\hat{\theta}$ er *forventningsrett* dersom $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Vi foretrekker stort sett forventningsrette estimatorer med lav varians ($\mathrm{Var}(\hat{\theta})$ lav).

Hypotesetesting

Alternativhypotesen H_1

- Påstanden vi kommer med.

Nullhypotesen H_0

- Det 'motsatte' av H_1
- Har vi grunnlag fra data for å forkaste H_0 til fordel for H_1?

Definisjon 6.2.2. Testobservator

Enhver funksjon T av dataene som dikterer om vi skal forkaste nullhypotesen H_0 kalles en *testobservator*.

C: *forkastningsområde* / *kritisk* område

Forkast H_0 til fordel for H_1 dersom du observerer $t \in C$.

Definisjon 6.2.3. Signifikansnivå α

Dersom H_0 er sann, så er sannsynligheten for at testobservatoren tar en verdi i det kritiske området lik α, der α er testens *signifikansnivå*.

$$\alpha = P(T \in C | H_0)$$

- Vi **velger** α, og utleder deretter C.

Steg for steg

1. Anta et tilfeldig utvalg $X_1, \ldots, X_n$ fra $f(x;\theta)$
2. Formuler H_0 og H_1 utifra påstand om hvilken verdi θ tar.
3. Bestem en testobservator $T(X_1, \ldots, X_n)$
4. Bestem testens signifikansnivå α og forkasningsområde C

5. Samle inn data og regn ut $t = t(x_1, \dots, x_n)$.
6. Forkast eller ikke forkast H_0 til fordel for H_1

Test μ i normalfordeling, σ^2 kjent

$X_1, \dots, X_n$, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ensidige tester

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$
  - $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - $T | H_0 \sim N(0, 1)$
  - $C = (z_\alpha, \infty)$
- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$
  - $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - $T | H_0 \sim N(0, 1)$
  - $C = (-\infty, -z_\alpha)$

Tosidig test

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - $T | H_0 \sim N(0, 1)$
  - $C = \{(-\infty, -z_{\alpha/2}), (z_{\alpha/2}, \infty)\}$

Test p i binomisk fordeling (stor n - sentralgrenseteoremet)

$Y \sim \text{binom}(n, p)$

Ensidige tester

- $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p > p_0$
  - $T = \frac{Y - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$
  - $T | H_0 \sim N(0, 1)$
  - $C = (z_\alpha, \infty)$
- $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p < p_0$
  - $T = \frac{Y - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$
  - $T | H_0 \sim N(0, 1)$
  - $C = (-\infty, -z_\alpha)$

Tosidig test

- $H_0 : p = p_0$, $H_1 : p \neq p_0$
  - $T = \frac{Y - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$

- $T|H_0 \sim N(0,1)$
- $C = \{(-\infty, -z_{\alpha/2}), (z_{\alpha/2}, \infty)\}$

Definisjon 6.2.4 p-verdi

For en testobservator T, og observasjon t, så er p-verdien sannsynligheten for å få t eller noe er ekstremt (relativt til H_1) når vi antar at H_0 er sann.

Vi forkaster H_0 til fordel for H_1 dersom $p < \alpha$

Test μ i normalfordeling, σ^2 kjent, p-verdi

$X_1, \dots, X_n$, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Bestem først signifikansnivå α.

Ensidige tester

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$
  - $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - $T|H_0 \sim N(0,1)$
  - $p = P(T \geq t|H_0)$, der t er observasjonen vi gjør
- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$
  - $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - $T|H_0 \sim N(0,1)$
  - $p = P(T \leq t|H_0)$, der t er observasjonen vi gjør

Forkast H_0 dersom $p < \alpha$

Tosidig test

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
  - $T|H_0 \sim N(0,1)$
  - $p = P(|T| \geq |t||H_0)$, der t er observasjonen vi gjør

Forkast H_0 dersom $p < \alpha$

Type-1 og Type-2 feil

	H_0 sann	H_1 sann
Forkast H_0	Type-1 feil	Riktig
Ikke forkast H_0	Riktig	Type-2 feil

$\alpha = P(\text{Type 1 feil}) = P(\text{Forkast } H_0 |\ H_0 \text{ sann})$

$\beta = P(\text{Type 2 feil}) = P(\text{Ikke forkast } H_0 |\ H_1 \text{ sann})$

Teststyrke

$$1 - \beta = P(\text{Forkast } H_0 | \ H_1 \text{ sann})$$

Avhenger av den sanne verdien av parameteren, α, n og eventuelt andre parametere.