Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I EMNE ST1201 STATISTISKE METODER

Tirsdag 20. desember 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Alle kalkulatorer tillatt.

Sensur er ferdig: 17. januar 2006.

Oppgave 1

En forskningsinstitusjon har fem ulike typer måleapparater for å måle infrarød stråling og ønsker å finne ut om det er forskjell på måleinstrumentene. Et forsøk blir gjort der man for hvert av femten objekter målte mengde infrarød stråling med hver av de fem instrumentene. De femten objektene som ble benyttet var alle forskjellige med hensyn til materiale, temperatur og størrelse.

En (delvis utfylt) variansanalysetabell (ANOVA-tabell) for de utførte målingene er som følger.

Kilde	df	SS	MS	F	p-verdi
Instrument	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	0.000
Objekt	$\star$	45.48159	$\star$	$\star$	0.000
Error	$\star$	0.26981	$\star$		
Total	$\star$	45.95359			

a) Hva slags forsøksdesign er benyttet i situasjonen beskrevet over?

Skriv opp den fullstendige ANOVA-tabellen. Vis hvordan du beregner verdiene der det står $\star$ i den oppgitte tabellen.

Spesifiser den stokastiske modellen ANOVA-tabellen over er basert på. Forklar spesielt hva de ulike parametre representerer i forhold til situasjonen beskrevet over.

b) I ANOVA-tabellen er det oppgitt to p-verdier. Spesifiser hvilke nullhypotese, H_0, disse to p-verdiene relaterer seg til.

Hvilken av de to p-verdiene er av interesse for forskningsinstitusjonen? Hva blir konklusjonen på denne testen? (Begrunn svarene!)

Oppgave 2

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være et tilfeldig utvalg fra en gammafordeling med parametre r og λ, dvs. med sannsynlighetstetthet

$$f(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \ x > 0, r > 0, \lambda > 0.$$

Det oppgis at forventning og varians for en gammafordeling er henholdsvis

$$\mathrm{E}[X] = \frac{r}{\lambda} \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{r}{\lambda^2}.$$

Finn momentestimatorene for r og λ basert på $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Oppgave 3

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være et tilfeldig utvalg fra en normalfordeling med (kjent) forventning $\mathrm{E}[X_i] = 1$ og (ukjent) varians $\mathrm{Var}[X_i] = \theta$.

a) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for θ blir

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2.$$

Begrunn at $n\widehat{\theta}/\theta$ er χ^2-fordelt med n frihetsgrader.

b) Vis videre at $\widehat{\theta}$ er forventningsrett og bestem denne estimatorens varians. *Hint: Benytt hva du vet fra punkt* **a**), *nemlig at* $n\widehat{\theta}/\theta \sim \chi^2_n$.

Benytt Cramer-Raos ulikhet til å vise at $\widehat{\theta}$ er en *beste* estimator, dvs. vis at det ikke finnes noen forventningsrette estimatorer for θ som har mindre varians enn $\widehat{\theta}$.

c) Utled et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

Man ønsker også å benytte de observerte verdier for $X_1, X_2, \ldots, X_n$ til å teste

$$\mathrm{H}_0 : \theta = 1 \quad \text{mot} \quad \mathrm{H}_1 : \theta \neq 1.$$

d) Bruk $\widehat{\theta}$ som testobservator og bestem en beslutningsregel for når man skal forkaste H_0. Benytt signifikansnivå α.

Utled styrkefunksjonen for denne testen. Skisser den kvalitative oppførselen til styrkefunksjonen når $\alpha = 0.05$ og $n = 10$.

e) Finn generalisert "likelihood ratio" (GLR), λ, for H_0 og H_1 som angitt over.

Forklar hvorfor testen du utledet i punkt **d**) ikke er en generalisert "likelihood ratio" test (GLRT).