

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **ST1201/ST6201** Statistiske metoder

Fagleg kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato: august 2015

Eksamenstid (frå–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C:

- Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag,
- K.Rottman. Matematisk formelsamling,
- Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater,
- Kalkulator: HP30S, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller Casio fx-82ES PLUS.

Annan informasjon:

Sensur:

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1

La X_1, X_2, \dots, X_n vere eit tilfeldig utval frå ein kontinuerlig fordeling med sannsynstettleik

$$f(x) = \frac{x e^{-x/\beta}}{\beta^2}, \quad x > 0.$$

Det blir oppgitt at denne fordelinga har $E(X) = 2\beta$ og $\text{Var}(X) = 2\beta^2$. Verdien til parameteren β er ukjend og skal estimerast.

a) Vis at sannsynsmaksimeringsestimatorens (SME) for β er

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

La $Z_i = 2X_i/\beta$.

b) Vis at Z_i er chi^2 -fordelt med fire fridomsgrader.

Vis/grunngi at $4n\hat{\beta}/\beta \sim \chi_{4n}^2$.

Vi ønsker så å nytte observerte verdiar for X_1, X_2, \dots, X_n til å teste om det er grunnlag for å hevde at $\beta > \beta_0$ der β_0 er eit gitt tal.

c) Angi passende hypotesar H_0 og H_1 for denne situasjonen. Velj ein testobservator og utlei ein tilhøyrande beslutningsregel med signifikansnivå lik α .

Kva blir konklusjonen på testen dersom $\beta_0 = 2$, $n = 10$, $\sum_{i=1}^n x_i = 25.87$ og $\alpha = 0.05$.

d) Utlei styrkefunksjonen for testen du fann i punktet over (finn uttrykk for generelle β_0 , n og α).

For $\beta_0 = 2$, $n = 10$ og $\alpha = 0.05$, for kva verdi av β blir teststyrken lik 0.99? Gi også ein presis skildring av kva for ei hending som har sannsyn lik 0.99 her.

Oppgåve 2

Eit anleggsg oretak har undersökt korleis forventa opptak av fukt varierer mellom fire typar betong. I unders okinga nytta g oretaket seks pr over av kvar av dei fire betongtypane. Kvar av dei totalt 24 pr ovene vart utsette for fukt i 48 timar og det vart målt kor mykje fukt som vart teke opp i pr ovene. G oretaket fekk følgjande resultat (første tabell).

Ein delvis utfylt variansanalysetabell (ANOVA-tabell) for desse målingane er som følgjer (andre tabell).

Betongtype:	1	2	3	4
Y_{ij}	551	595	639	550
	457	580	615	449
	450	508	511	517
	731	583	573	438
	499	633	648	415
	632	517	677	555
$\sum_{i=1}^6 Y_{ij}$	3320	3416	3663	2924
$S_j^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$:	12133.87	2302.67	3593.50	3704.27

Kilde	df	SS	MS	F
Betong	*	*	15734.38	*
Error	*	108671.50	*	
Total	*	*		

a) Skriv opp den fullstendige ANOVA-tabellen. Vis korleis du reknar ut verda der det står * i den oppgitte tabellen.

b) I ANOVA-tabellen inngår det ein testobservator F . Spesifiser kva for hypotesar H_0 og H_1 denne testobservatoren relaterer seg til. Forklar spesielt kva eventuelle parametrar du nyttar i spesifikasjonen av H_0 og H_1 representerer i situasjonen skildra over.

Utfør hypotesetesten for signifikansnivå $\alpha = 0.05$ og konkluder.

c) Angje modellen som to-utval t -test baserer seg på.

Utfør ein to-utval t -test for   teste om det er grunnlag for   påstå at forventningsverda for oppteken fukt for betong av type 3 og 4 er ulike.

Sammenlikn konklusjonane på dei to hypotesetestene du har utført og kommenter.

Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi rekne på ein regresjonsmodell som er noko modifisert i forhold til han som er handsama i læreboka. Gå utifrå at vi har variabelpar

$$(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$$

der x_1, x_2, \dots, x_n ikkje sjås på som stokastiske, mens Y_1, Y_2, \dots, Y_n går vi utifrå er uavhengige stokastiske variablar med

$$Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma_0^2 x_i).$$

Variansen til Y_i er altså proporsjonal med x_i . I denne oppgåva skal vi gå utifrå at σ_0^2 har ein kjend verdi, mens dei to parameterane α og β skal estimerast basert på dei tilgjengelege data.

- a) Utlei sannsynsmaksimeringsestimatorane (SME) for α og β og vis at dei kan skrivast på forma

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

og

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{Y} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}}{\bar{x} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - n}$$

der

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

- b) Vis at $\hat{\beta}$ er forventningsrett.

- c) Kva for ei sannsynsfordeling har $\hat{\beta}$? Du skal gi grunn for svaret.

Utlei eit $100(1 - \delta)\%$ -konfidensintervall for β hvis det er kjend at

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_0^2}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}{\bar{x} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) - 1}.$$