Noregs teknisk–
naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I EMNE ST1201 STATISTISKE METODAR

Tysdag 20. desember 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemiddel: Alle trykte og handskrivne hjelpemiddel tillatne.
Alle kalkulatorar tillatne.

Sensur er ferdig: 17. januar 2006.

Oppgåve 1

Ein forskningsinstitusjon har fem ulike typer måleapparat for å måle infraraud stråling og ønskjer å finne ut om det er forskjell på måleinstrumenta. Eit forsøk blir gjort der ein for kvart av femten objekt målte mengde infraraud stråling med kvar av dei fem instrumenta. Dei femten objekta som vart nytta var alle forskjellige med omsyn på materiale, temperatur og storleik.

Ein (delvis utfylt) variansanalysetabell (ANOVA-tabell) for dei utførte målingane er som følgjer.

Kjelde	df	SS	MS	F	p-verdi
Instrument	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	0.000
Objekt	$\star$	45.48159	$\star$	$\star$	0.000
Error	$\star$	0.26981	$\star$		
Total	$\star$	45.95359			

a) Kva slags forsøksdesign er nytta i situasjonen skildra over?

Skriv opp den fullstendige ANOVA-tabellen. Vis korleis du bereknar verdiane der det står $\star$ i den oppgitte tabellen.

Spesifiser den stokastiske modellen ANOVA-tabellen over er basert på. Forklar spesielt kva dei ulike parametrane representerer i forhold til situasjonen skildra over.

b) I ANOVA-tabellen er det oppgitt to p-verdiar. Spesifiser kva for nullhypotese, H_0, desse to p-verdiane relaterer seg til.

Kva for ein av dei to p-verdiane er av interesse for forskningsinstitusjonen? Kva blir konklusjonen på denne testen? (Grunngi svara!)

Oppgåve 2

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vere eit tilfeldig utvalg frå ei gammafordeling med parametrar r og λ, dvs. med sannsynstettleik

$$f(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \; x > 0, r > 0, \lambda > 0.$$

Det blir oppgitt at forventning og varians for ei gammafordeling er høvesvis

$$\mathrm{E}[X] = \frac{r}{\lambda} \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{r}{\lambda^2}.$$

Finn momentestimatorane for r og λ basert på $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Oppgåve 3

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vere eit tilfeldig utvalg frå ei normalfordeling med (kjent) forventning $\mathrm{E}[X_i] = 1$ og (ukjent) varians $\mathrm{Var}[X_i] = \theta$.

a) Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren (SME) for θ blir

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2.$$

Grunngi at $n\widehat{\theta}/\theta$ er χ^2-fordelt med n fridomsgrader.

b) Vis vidare at $\widehat{\theta}$ er forventningsrett og bestem variansen til denne estimatoren. *Hint: Bruk kva du veit frå punkt* **a**)*, nemlig at* $n\widehat{\theta}/\theta \sim \chi^2_n$.

Bruk Cramer-Raos ulikskap til å vise at $\widehat{\theta}$ er ein *beste* estimator, dvs. vis at det ikkje finst forventningsrette estimatorar for θ som har mindre varians enn $\widehat{\theta}$.

c) Utlei eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

Ein ønskjer også å nytte dei observerte verdiane for $X_1, X_2, \ldots, X_n$ til å teste

$$\mathrm{H}_0 : \theta = 1 \quad \text{mot} \quad \mathrm{H}_1 : \theta \neq 1.$$

d) Bruk $\widehat{\theta}$ som testobservator og bestem ein beslutningsregel for når ein skal forkaste H_0. Bruk signifikansnivå α.

Utlei styrkefunksjonen for denne testen. Skisser den kvalitative oppførselen til styrkefunksjonen når $\alpha = 0.05$ og $n = 10$.

e) Finn generalisert "likelihood ratio" (GLR), λ, for H_0 og H_1 som gitt over.

Forklar kvifor testen du utleidde i punkt **d**) ikkje er ein generalisert "likelihood ratio" test (GLRT).