Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Trond Sagerup 970 81 386

EKSAMEN I EMNE ST1201/ST6201 STATISTISKE METODER
Fredag 8. desember 2006
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Alle kalkulatorer tillatt.

Sensur er ferdig: 29. desember 2006.

Oppgave 1

La $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ og $Y \sim \mathrm{N}(\mu, 2\sigma^2)$ og anta at X og Y er uavhengige. Vi ønsker å estimere μ fra de observerte verdiene for X og Y. Følgende to estimatorer er foreslått,

$$\widehat{\mu} = \frac{X + \frac{1}{2}Y}{1 + \frac{1}{2}} \quad , \quad \tilde{\mu} = \frac{X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Hvilken av de to estimatorene vil du foretrekke? Svaret skal begrunnes!

Oppgave 2

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være et tilfeldig utvalg fra en kontinuerlig fordeling med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \frac{xe^{-x/\beta}}{\beta^2} \quad , \quad x > 0.$$

Det oppgis at denne fordelingen har $\mathrm{E}[X] = 2\beta$ og $\mathrm{Var}[X] = 2\beta^2$. Verdien til parameteren β er ukjent og skal estimeres.

a) Forklar kort hvordan momentestimatorer er definert generelt (når man har r ukjente parametre $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$).

Vis at momentestimatoren for parameteren β i fordelingen gitt over er

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La $Z_i = 2X_i/\beta$.

b) Vis at Z_i er χ^2-fordelt med fire frihetsgrader.

Vis/begrunn at $4n\widehat{\beta}/\beta \sim \chi^2_{4n}$. Angi spesielt eventuelle kjente egenskaper ved χ^2-fordelingen du benytter for å trekke denne konklusjonen.

Vi ønsker så å benytte observerte verdier for $X_1, X_2, \ldots, X_n$ til å teste om det er grunnlag for å påstå at $\beta > \beta_0$ der β_0 er et gitt tall.

c) Angi passende hypoteser H_0 og H_1 for denne situasjonen. Velg en testobservator og utled en tilhørende beslutningsregel med signifikansnivå lik α.

Hva blir konklusjonen på testen dersom $\beta_0 = 2$, $n = 10$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 25.87$ og $\alpha = 0.05$.

d) Utled styrkefunksjonen for testen du fant i forrige punkt (finn uttrykk for generelle β_0, n og α).

For $\beta_0 = 2$, $n = 10$ og $\alpha = 0.05$, for hvilken verdi av β blir teststyrken lik 0.99? Gi også en presis beskrivelse av hvilken hendelse som har sannsynlighet lik 0.99 her.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi regne på en regresjonsmodell som er noe modifisert i forhold til den som er behandlet i læreboka. Anta at vi har variabelpar $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \ldots, (x_n, Y_n)$ der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ikke betraktes som stokastiske, mens $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ antas å være uavhengige stokastiske variabler med

$$Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta x_i, \sigma_0^2 x_i).$$

Variansen til Y_i antas altså å være proporsjonal med x_i. I denne oppgaven skal vi anta at σ_0^2 har en kjent verdi, mens de to parametrene α og β skal estimeres basert på de tilgjengelige data.

a) Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene (SME) for α og β og vis at de kan skrives på formen

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \widehat{\beta}\bar{x} \qquad \text{og} \qquad \widehat{\beta} = \frac{\bar{Y}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}}{\bar{x}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} - n},$$

der $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ og $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

b) Vis at $\widehat{\beta}$ er forventningrett og vis at

$$\mathrm{Var}[\widehat{\beta}] = \frac{\sigma_0^2}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{\bar{x}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) - 1}.$$

c) Hvilken sannsynlighetsfordeling har $\widehat{\beta}$? Svaret skal begrunnes, og spesielt må du angi eventuelle kjente egenskaper du benytter og forklare hvorfor de(n) gjelder i den aktuelle situasjonen.

Utled et $(1 - a) \cdot 100\%$ konfidensintervall for β.