Noregs teknisk–
naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:
Trond Sagerup 970 81 386

EKSAMEN I EMNE ST1201/ST6201 STATISTISKE METODAR

Fredag 8. desember 2006
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemiddel: Alle trykte og handskrivne hjelpemiddel tillatne.
Alle kalkulatorar tillatne.

Sensur er ferdig: 29. desember 2006.

Oppgåve 1

La $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ og $Y \sim \mathrm{N}(\mu, 2\sigma^2)$ og gå utifrå at X og Y er uavhengige. Vi ønskjer å estimere μ frå dei observerte verdiane for X og Y. Følgjande to estimatorar er føreslegne,

$$\widehat{\mu} = \frac{X + \frac{1}{2}Y}{1 + \frac{1}{2}} \quad , \quad \tilde{\mu} = \frac{X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Kva for ein av dei to estimatorane vil du føretrekkje? Grunngi svaret!

Oppgåve 2

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vere eit tilfeldig utval frå ein kontinuerleg fordeling med sannsynstettleik

$$f(x) = \frac{xe^{-x/\beta}}{\beta^2} \quad , \quad x > 0.$$

Det blir oppgitt at denne fordelinga har $\mathrm{E}[X] = 2\beta$ og $\mathrm{Var}[X] = 2\beta^2$. Verdien til parameteren β er ukjend og skal estimerast.

a) Forklar kort korleis momentestimatorar er definerte generelt (når man har r ukjende parametrar $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$).

Vis at momentestimatoren for parameteren β i fordelinga gitt over er

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La $Z_i = 2X_i/\beta$.

b) Vis at Z_i er χ^2-fordelt med fire fridomsgrader.

Vis/grunngi at $4n\widehat{\beta}/\beta \sim \chi^2_{4n}$. Angi spesielt eventuelle kjende eigenskapar ved χ^2-fordelinga du nyttar for å trekkje denne konklusjonen.

Vi ønskjer så å nytte observerte verdiar for $X_1, X_2, \ldots, X_n$ til å teste om det er grunnlag for å hevde at $\beta > \beta_0$ der β_0 er eit gitt tal.

c) Angi passande hypotesar H_0 og H_1 for denne situasjonen. Velj ein testobservator og utlei ein tilhøyrande beslutningsregel med signifikansnivå lik α.

Kva blir konklusjonen på testen dersom $\beta_0 = 2$, $n = 10$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 25.87$ og $\alpha = 0.05$.

d) Utlei styrkefunksjonen for testen du fann i punktet over (finn uttrykk for generelle β_0, n og α).

For $\beta_0 = 2$, $n = 10$ og $\alpha = 0.05$, for kva verdi av β blir teststyrken lik 0.99? Gi også ein presis skildring av kva for ei hending som har sannsyn lik 0.99 her.

Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi rekne på ein regresjonsmodell som er noko modifisert i forhold til han som er handsama i læreboka. Gå utifrå at vi har variabelpar $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \ldots, (x_n, Y_n)$ der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ikkje sjås på som stokastiske, mens $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ går vi utifrå er uavhengige stokastiske variablar med

$$Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta x_i, \sigma_0^2 x_i).$$

Variansen til Y_i er altså proporsjonal med x_i. I denne oppgåva skal vi gå utifrå at σ_0^2 har ein kjend verdi, mens dei to parametrane α og β skal estimerast basert på dei tilgjengelege data.

a) Utlei sannsynsmaksimeringsestimatorane (SME) for α og β og vis at dei kan skrivast på forma

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \widehat{\beta}\bar{x} \quad \text{og} \quad \widehat{\beta} = \frac{\bar{Y}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}}{\bar{x}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - n},$$

der $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ og $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

b) Vis at $\widehat{\beta}$ er forventningsrett og vis at

$$\mathrm{Var}[\widehat{\beta}] = \frac{\sigma_0^2}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}{\bar{x}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) - 1}.$$

c) Kva for ei sannsynsfordeling har $\widehat{\beta}$? Du skal gi grunn for svaret, og spesielt skal du angi eventuelle kjend(e) eigenskap(ar) du nyttar og forklare kvifor han/dei gjeld i den aktuelle situasjonen.

Utlei eit $(1 - a) \cdot 100\%$ konfidensintervall for β.