



Kontaktperson:  
Håvard Rue 73593533/92600021

**Eksamen i ST1201/ST6201 Statistiske metoder**  
Mandag 7. desember 2009  
Tid: 09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler:

- Tabeller og formler i statistikk (Tapir forlag)
- Gyldig kalkulator

**Alle svar skal begrunnes.**

**Notasjon:** “log” er den naturlige logaritmen.

**You may answer in English or Norwegian.**

**Du kan besvare enten på engelsk eller norsk (begge målføre).**

**Oppgave 1**

La  $p$  være sannsynligheten for å få en 6'er i ett kast med en terning.

- a) Hvor mange (uavhengige) kast trenger vi, der vi ikke får noen 6'er, for å forkaste hypotesen

$$H_0 : p = \frac{1}{6} \text{ mot } H_1 : p < \frac{1}{6}$$

på nivå  $\alpha = 0.05$ ?

**PS:** Her skal du regne eksakt og ikke bruke normaltilnærmingen.

**Oppgave 2** La  $X_1, \dots, X_n$  være et tilfeldig utvalg av størrelse  $n$  fra Poisson-fordelingen med forventningsverdi  $\lambda$ .

- a) Finn en momentestimator for  $\lambda$ .  
Finn estimatorens forventningsverdi og varians.
- b) Finn en sannsynlighetsmaksimeringsestimator (*maximum likelihood estimator*) for  $\lambda$ .  
Finn estimatorens forventningsverdi og varians.

Cramér-Rao's ulikhet sier at

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left\{ -nE \left[ \frac{\partial^2 \log f_Y(Y; \theta)}{\partial \theta^2} \right] \right\}^{-1}$$

- c) Gjør rede for
1. hva dette resultatet betyr og kan brukes til, samt
  2. hvilke forutsetninger som ligger til grunn for dette resultatet.
- d) Hva blir Cramér-Rao's nedre grense for en forventningsrett estimator for  $\lambda$  i Poisson-fordelingen?  
Bruk dette til å kommentere resultatene i a) og b).

**Oppgave 3**

I Engelsk *premier-league*, sesongen 1993-94, endte 41 kamper 0-0, 32 kamper 0-1, 51 kamper 1-0, og 65 kamper 1-1.

- a) Undersøk om det er grunnlag for å forkaste påstanden om at antall mål laget av hjemmelaget er uavhengig av antall mål laget av bortelaget.

**Oppgave 4**

PhD-stipendiat Kåre, har laget en ny kantdekteksjonsalgoritme for ultralydbilder av hjerte. I en undersøkelse med 20 pasienter, gir Kåres algoritme bedre resultat enn standardmetoden for 15 av de 20 pasientene. Kåre lurer på om det er grunnlag for å si at hans algoritme er bedre enn standardmetoden.

- a) Formuler dette som et hypotesetestingsproblem.

Hva blir konklusjonen dersom  $\alpha = 0.05$ ?

**Oppgave 5**

Anta følgende regresjonsmodell

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

hvor  $\epsilon$  er normalfordelt med forventningsverdi 0 og varians  $\sigma^2$ , samt at vanlige forutsetninger gjelder.

La videre  $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  være resultater fra et (tenkt) forsøk.

Vanlige estimatorer for  $\beta_1$  og  $\beta_0$ , er

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

og

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

- a) Finn fordelingen (inkludert alle parametre) til  $\hat{\beta}_1$ .  
Finn fordelingen (inkludert alle parametre) til  $\hat{\beta}_0$ .
- b) Finn et  $1 - \alpha$  konfidensintervall for  $\hat{\beta}_1$ .
- c) Gi et eksempel på et *design* (dvs. valg av  $x_i$ 'ene) som gjør at  $\hat{\beta}_0$  er en konsistent estimator for  $\beta_0$ , mens  $\hat{\beta}_1$  **ikke** er en konsistent estimator for  $\beta_1$ .  
Gi en intuitiv forklaring på dette resultatet.