

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **ST1201 Statistiske metoder**

Faglig kontakt under eksamen: Bo Lindqvist

Tlf: 975 89 418

Eksamensdato: 19. desember 2020

Eksamenstid (fra-til): 09:00 – 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Hjelpemiddelkode C:

- Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag,
- K.Rottman: Matematisk formelsamling,
- Ett gult ark (A4 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater,
- Bestemt, enkel kalkulator

Annen informasjon:

Alle svar må begrunnes.

Du må ha med nok mellomregninger til at tenkemåten din klart fremgår.

Oppgaven består av 10 delpunkter som har lik vekt ved sensur.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig 2-sidig

sort/hvit farger

skal ha flervalgskjema

Dato

Sign

Oppgave 1 Fordeling av sjokoladebiter i en julepose

En sjokoladefabrikken tilbyr forskjellige Favoritter pakker hvor kunder finner kjente og kjære sjokoladebiter i det samme pose. I følge av den fabrikken er kombinasjonen i juleposen 26% Julekuler, 14% Sjokolademus, 24% Julefigur, 20% Festkaramell og 16% marsipangris. Fem studenter har kjøpt flere juleposer og funnet følgende fordelingen i 300 sjokoladebiter:

Sjokoladebit	Antall
Julekuler	100
Sjokolademus	47
Julefigur	62
Festkaramell	53
Marsipangris	38

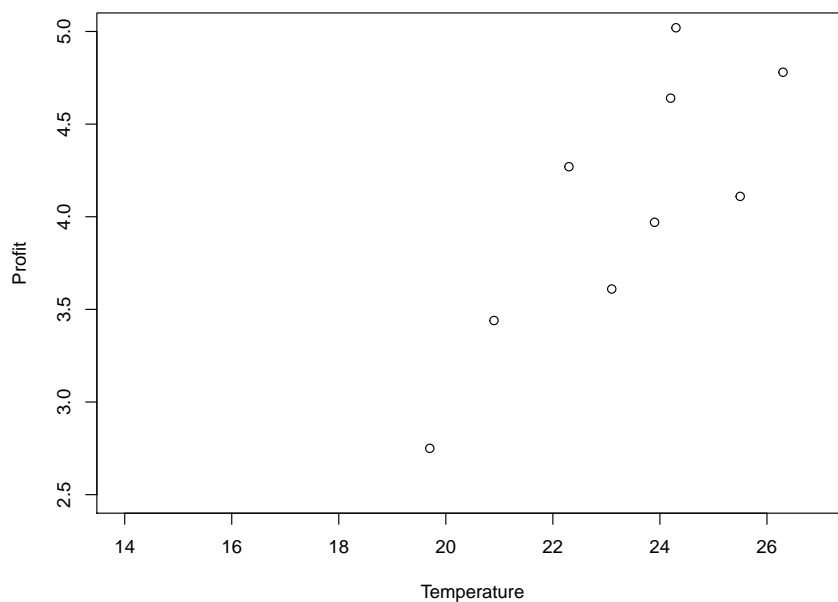
- a) Kan studentene komme til konklusjonen at fordelingen av sjokoladebiter er annerledes enn sjokoladefabrikken sier? Use $\alpha = 0.05$ level of significance.

Oppgave 2 Iskrem

Eierne av en isbutikk i Tyskland undersøkte overskuddet (i euro) over en varm periode på 11 dager i juli 2020. De vurderte de tilsvarende dagene maksimal temperatur (i °C) som en forklarende variabel og modellerte relasjonen ved hjelp av en lineær regresjonsmodell:

$$Y_i = \mu + \beta x_i + \epsilon_i; \quad i = 1, \dots, 11.$$

Dessverre ble overskuddet bare registrert i 10 av de 11 dagene. De observerte for-tjeneste (Y) og temperaturer (X) er vist i det følgende grafen og de nøyaktige verdiene finner du i tabellen:



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Y_i	4.27	3.44	5.19		2.75	3.61	5.02	4.64	3.97	4.11	4.78
x_i	22.3	20.9	25.6	15.6	19.7	23.1	24.3	24.2	23.9	25.5	26.3

- a) Beregn minste kvadrat estimatorer $\hat{\mu}$ og $\hat{\beta}$ bare med tanke på fullstendige data. Du kan bruke at

$$\sum_{i \neq 4} x_i = 235.8, \quad \sum_{i \neq 4} x_i^2 = 5600.44, \quad \sum_{i \neq 4} y_i = 41.78, \quad \sum_{i \neq 4} x_i y_i = 997.223.$$

- b) Finn en estimat \hat{Y}_4 for den manglende fortjenesteverdien Y_4 og konstruer tilsvarende 95%-konfidensintervall for Y_4 .
- c) Anta at den observerte verdien ville være lik den forutsagte verdien, det vil si $Y_4 = \hat{Y}_4$. Endrer seg estimatene for parameterne μ og β , hvis regresjon ble nå utført med alle de 11 observasjonene?

(Ikke gjør beregningen! En kort begrunnelse i ord er nok)

Oppgave 3 Utviklingstida av en dronningbi

Det antas at utviklingen av en dronningbi avhenger av temperaturen i bikuben. Det er utført tre eksperimenter der dronninger blir oppdrettet ved forskjellige temperaturer i en bikube: 1) lav temperatur på 31 grader Celsius; 2) middels temperatur på 32,5 grader Celsius; 3) høye temperaturer på 34 grader Celsius. De utviklingstider er oppsummert i følgende tabell, hvor n_j angir antall bier som er oppdrettet under temperatur $j = 1, 2, 3$, \bar{Y}_j gjennomsnittlig utviklingstid i dager for temperaturgruppen j og S_j er den empiriske standardavvik.

j	n_j	\bar{Y}_j	S_j
lav temperatur	14	14.5	0.45
middels temperatur	14	15.1	0.48
høy temperatur	16	15.5	0.42

- a) Konstruer den komplette ANOVA-tabellen og test nullhypotesen om at den gjennomsnittlige dronningens utviklingstid i dager for dronningsegg oppdrettet i en lav, en medium og en høy temperatur bikube er den samme. La 0.05 være signifikansnivået.
- b) Konstruer en kontrast for å teste hypotesen at den gjennomsnittlige utviklingstiden under lav og høy temperatur er den samme som utviklingstiden under middels temperatur. La 0.05 være signifikansnivået.

Oppgave 4 Fysisk eller digital undervisning?

Et kurs i økonomi ble undervist for to grupper av studenter. Den ene gruppen ble gitt normal klasseromsundervisning, mens den andre gruppen ble gitt en form for digital undervisning. Det var 16 studenter i hver gruppe. For å dele studentene inn i grupper ble studentene først ordnet i 16 undergrupper av størrelse 2 slik at de to studentene innen hver undergruppe var mest mulig like med hensyn til evner og forhåndskunnskaper. Deretter ble det slått mynt og kron om hvilken type undervisning de skulle få. Ved slutten av kurset fikk alle studentene samme eksamen og hver kandidat fikk en poengsum fra 0 til 100. Målet var å finne ut om det var grunnlag for å si at disse to undervisningsmetodene ga forskjellige resultat.

La X_i for $i = 1, 2, \dots, 16$ være poengsum i undergruppe nummer i for de som hadde klasseromsundervisning og la Y_i for $i = 1, 2, \dots, 16$ være poengsum i undergruppe i for de som hadde fjernsynsundervisning. La D_i være $X_i - Y_i$. De observerte verdiene d_i for D_i ble:

12	8	-3	13	7	2	6	21
7	2	11	-3	-14	-2	17	-4

- a) Bruk en paret t-test (*Paired t Test*) til å undersøke om det er grunnlag for å konkludere at de to undervisningsmetodene gir forskjellig resultat.

Hvilke forutsetninger må du gjøre for å bruke denne testen?

Formuler nullhypotesen H_0 og den alternative hypotese H_1 .

Sett opp testobservatoren og gjennomfør testen når signifikansnivået settes til 5%. Hva blir konklusjonen på testen?

Du kan bruke at $\sum_{i=1}^{16} d_i = 80$, $\sum_{i=1}^{16} d_i^2 = 1604$

- b) Det ble stilt spørsmål rundt forutsetningene for den paret t-testen, og det ble derfor satt fram et ønske om å bruke tegntesten for paret data (*Sign Test for Paired Data*).

Denne testen baserer seg på testobservatoren V som er antall av de $n=16$ par (X_i, Y_i) der $X_i > Y_i$.

La $p = P(X_i > Y_i)$ og spesifiser antagelser som gir at V er binomisk fordelt med $n = 16$ og sannsynlighet p .

Forklar hvorfor nullhypotesen for vår testing av forskjell mellom de to undervisningsmetodene nå kan skrives $H_0 : p = 1/2$. Hva blir den alternative hypotesen?

Finn så V fra dataene og bruk tabellene til å finne p-verdi for testen du vil bruke basert på V .

Hva blir konklusjonen ved bruk av denne testen når du velger signifikansnivå 5%?

- c) En alternativ ikke-parametrisk test er Wilcoxons tegn-rang-test (*Wilcoxon Signed Rank Test*), også kalt Wilcoxons ett-utvalgs test.

Forklar hva denne testen går ut på og hvilke forutsetninger den bygger på. Sammenlign med forutsetningene som ble gjort for tegntesten i forrige punkt.

Formuler en nullhypotese og en alternativ hypotese.

Hvilken testobservator brukes i denne testen? Forklar hvordan man regner den ut og gjennomfør beregningen med de gitte dataene.

Regn ut p-verdien for testen ved å bruke tilnærming til normalfordelingen.

Hva blir konklusjonen ved bruk av denne testen med signifikansnivå 5%? Sammenlign med konklusjonene ovenfor.

- d) Det er velkjent at dersom forutsetningene for å bruke t-testen er oppfylt, vil denne gi den sterkeste testen av de tre som er betraktet i denne oppgaven.

I dette punktet er vi interessert i å sammenligne sannsynlighetene for å gjøre Type II-feil for tegntesten og en test basert på at D_i -ene er normalfordelte.

Forklar først kort hva som menes med Type I-feil og Type II-feil i hypotese-testing.

Betrakt først tegntesten i punkt b). La $n = 16$ og vis at en tosidig test av $H_0 : p = 1/2$ med signifikansnivå 5% blir å forkaste H_0 når

$$V \leq 3 \quad \text{eller} \quad V \geq 13$$

der V er definert i punkt (b).

Vis at sannsynligheten for Type I-feil nå er 0.022.

Testen i punkt a) er basert på at D_1, \dots, D_{16} er uavhengige og normalfordelte, $N(\mu_D, \sigma_D^2)$. I dette punktet antar vi at $\sigma_D^2 = 10^2$ er kjent.

Vis at en tosidig test for $H_0 : \mu_D = 0$ med sannsynlighet for Type I-feil lik 0.022 forkaster H_0 hvis

$$\bar{D} \leq -5.275 \quad \text{eller} \quad \bar{D} \geq 5.275$$

Anta nå at i virkeligheten er $\mu_D = 4$. Finn sannsynlighetene for å gjøre en Type II-feil ved hvert av de to testkriteriene i dette punktet. Gi en kommentar til slutt.