



Kontaktperson:
Håvard Rue 73593533/92600021

Eksamen i ST1201/ST6201 Statistiske metoder
Mandag 7.juni 2010
Tid: 09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler:

- Tabeller og formler i statistikk (Tapir forlag)
- Gyldig kalkulator

Alle svar skal begrunnes.

Notasjon: “log” er den naturlige logaritmen.

You may answer in English or Norwegian.

Du kan besvare enten på engelsk eller norsk (begge målføre).

Oppgave 1

(I denne oppgave skal du regne eksakt og ikke bruke tilnærminger.)

La p være sannsynligheten for å få en 6'er i ett kast med en terning. Per vil undersøke om

$$H_0 : p = \frac{1}{6} \text{ mot } H_1 : p < \frac{1}{6}.$$

og han gjør to forsøk.

- Per kaster terningen intil han får en 6'er første gang. I det 12'te kastet får han en 6'er. Er det grunnlag til å forkaste H_0 på nivå $\alpha = 0.05$?
- Per bestemmer seg for å kaste terningen 12 ganger og telle antall 6'ere han får. Han får en 6'er. Er det grunnlag til å forkaste H_0 på nivå $\alpha = 0.05$?

Oppgave 2 La X være Binomisk fordelt med forventningsverdi mp , hvor p er sannsynligheten for suksess.

- Finn en momentestimator for p .
Finn estimatorens forventningsverdi og varians.
- Finn en sannsynlighetsmaksimeringsestimator (*maximum likelihood estimator*) for p .
Finn estimatorens forventningsverdi og varians.

Cramér-Rao's ulikhet sier at

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left\{ -nE \left[\frac{\partial^2 \log f_Y(Y; \theta)}{\partial \theta^2} \right] \right\}^{-1}$$

- Gjør rede for
 - hva dette resultatet betyr og kan brukes til, samt
 - hvilke forutsetninger som ligger til grunn for dette resultatet.
- Hva blir Cramér-Rao's nedre grense for en forventningsrett estimator for p i Binomisk fordeling?
Bruk dette til å kommentere resultatene i **a)** og **b)**.

- e) En annen estimator for p er

$$\tilde{p} = \frac{X + 1}{m + 2}$$

Undersøk om denne estimatoren har mindre totalfeil

$$E((\tilde{p} - p)^2)$$

enn estimatoren $\hat{p} = X/m$.

- f) Forklar hvorfor resultatet i e) ikke strider mot Cramér-Rao's nedre grense.

Oppgave 3

I Engelsk *premier-league*, sesongen 1993-94, endte 41 kamper 0-0, 32 kamper 0-1, 51 kamper 1-0, og 65 kamper 1-1.

- a) Undersøk om det er grunnlag for å forkaste påstanden om at antall mål laget av hjemmelaget er uavhengig av antall mål laget av bortelaget.

Oppgave 4

Anta følgende regresjonsmodell

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

hvor ϵ er normalfordelt med forventningsverdi 0 og varians σ^2 , samt at vanlige forutsetninger gjelder.

La videre $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ være resultater fra et (tenkt) forsøk.

Vanlige estimatorer for β_1 og β_0 , er

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

og

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

- a) Finn fordelingen (inkludert alle parametre) til $\hat{\beta}_1$.
Finn fordelingen (inkludert alle parametre) til $\hat{\beta}_0$.
- b) Finn et $1 - \alpha$ konfidensintervall for $\hat{\beta}_1$.
- c) Hva mener vi med at en estimator er *konsistent*? Under hvilke betingelser er $\hat{\beta}_1$ konsistent? Under hvilke betingelser er $\hat{\beta}_0$ konsistent?