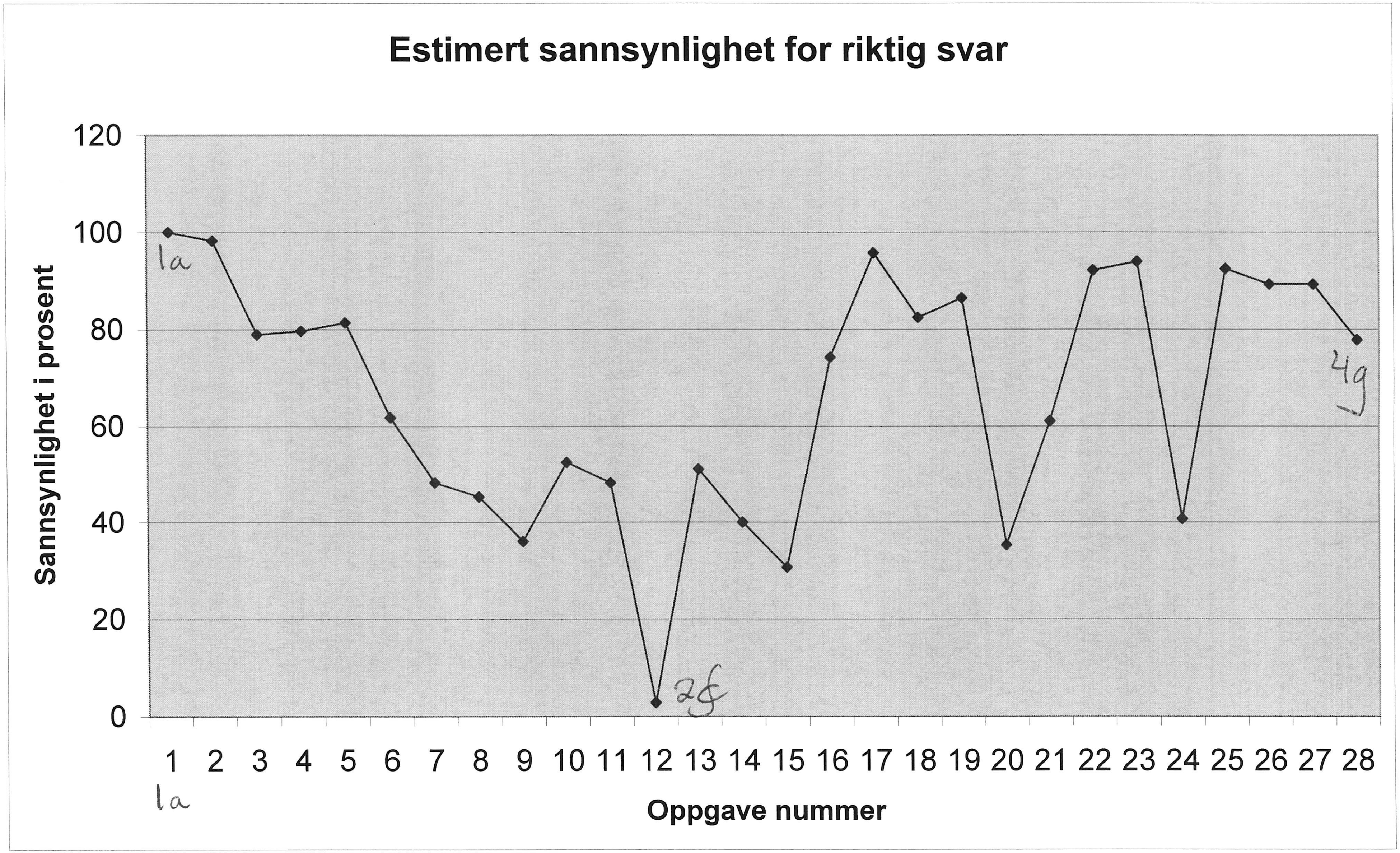
DES. 07


Estimert sannsynlighet for riktig svar
120
100
80
60
40
20
0
Sannsynlighet i prosent
1a
2f
4g
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
1a
Oppgave nummer

Des 07

Oppgave 1

a) $\bar{X}$ er forventningsrett fordi $EX_i = \mu + \sigma \cdot 0 = \mu$.

b) S^2 —||— $\text{Var}\, X_i = \text{Var}\, \sigma U_i = \sigma^2$

$\left(\bar{X} = \mu + \sigma \bar{U} \;\; \& \;\; S = \sigma S_U \;\; \text{gir} \;\; W = \sqrt{n}\, \bar{U}/S_U \right)$

c) $$1 - \alpha = P\left(\left| \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{S} \right| \le w_\alpha \right)$$
$$= P\left(\bar{X} - w_\alpha \cdot \hat{u} \le \mu \le \bar{X} + w_\alpha \cdot \hat{u} \right)$$
hvor $\hat{u} = S/\sqrt{n}$ gir at $\bar{x} \pm w_\alpha u$ tilsvarer et konfidensintervall med eksakt nivå $1 - \alpha$.

Obs: Dette er ikke en t-test.

d) Forkast H_0 dersom
$$\left| \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{S} \right| > w_\alpha$$
er en test med nivå α fra w_α definisjonen.

e) $$EU = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} u \, du = 0$$
$$\text{Var}\, U = EU^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} u^2 \, du = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{3}^3 \cdot 2 = 1$$

f) $$X = \mu + \sigma \cdot \text{Uniform}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$
$$= \mu + \text{Uniform}(-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma)$$
$$= \text{Uniform}(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$$

Oppgave 2

a) $L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a}[a \le X_i \le b] = \frac{1}{(b-a)^n}\cdot[a \le X_{(1)}]\cdot[X_{(n)} \le b]$

$\Rightarrow T = (X_{(1)}, X_{(2)})$ er tilstrekkelig.

b) Skal maksimere $L(a,b)$. Må ha $a \le X_{(1)}$ & $X_{(n)} \le b$ for å unngå $L = 0$. Faktoren $1/(b-a)^n$ er maksimert når $a = X_{(1)}$ (stor som mulig) og $b = X_{(n)}$ (liten b).
$\Rightarrow T$ er rimelighetsestimatoren.

c) $a = \mu - \sqrt{3}\,\sigma$ & $b = \mu + \sqrt{3}\,\sigma$
gir $\mu = (a+b)/2$ og $\sigma = (b-a)/(2\sqrt{3})$
Innsetting av T gir påstanden. $a \to T_1$, $b \to T_2$

d) $\operatorname{Var}\bar{X} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(b-a)^2}{12}$, så det må vises at
$\cancel{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2) \ge \cancel{12}^{6} n$; $6n \le n^2+3n+2$;
$0 \le n^2-3n+2 = (n-1)(n-2)$ er ok ved $n \ge 2$

e) $\hat{\mu}$ og $\bar{X}$ er forventningsrette og $\hat{\mu}$ er en funksjon av en komplett tilstrekkelig statistikk $\Rightarrow \operatorname{Var}\hat{\mu} \le \operatorname{Var}\bar{X}$

f) $\hat{\mu} = \mu + \sigma\cdot(u_{(n)} + u_{(1)})/2$
$\hat{\sigma} = \sigma\cdot(u_{(n)} - u_{(1)})/(2\sqrt{3})$

$): V = \sqrt{n}\cdot\sqrt{3}\cdot(U_{(n)} + U_{(1)})/(U_{(n)} - U_{(1)})$

g) $u = \hat{\sigma}/\sqrt{n}$ er standard feil.
$U = v_\alpha \cdot u$ —ıı— utvidet feil.

h) Oppgave 1 : $\bar{x} = 3,444$; $u = 2,498/10 \approx 0,25$; $U \approx 0,5$

Oppgave 2: $\hat{\mu} = (t_1 + t_2)/2 \approx 3,15$ $u = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{2 \cdot 101 \cdot 102}} \approx 0,06$

(Alternativt $\tilde{u} = \frac{1}{10} \cdot \frac{t_2 - t_1}{2\sqrt{3}} \approx 0,27$ i oppgave 1.)

$U \approx 0,53 \cdot \tilde{u} \approx 0,14$

i) Metoden i oppgave 2 gir mindre feil og mindre utvidet feil hvor, og i det lange løp.): Metode 2 er å foretrekke. I tillegg oppfylles suffisiensprinsippet av metode 2, men ikke av metode 1. Metode 1 kan være mer robust i forhold til avvik fra den antatte modellen.

Oppgave 3

a) $X_{ij} = \mu_j + \beta_i + Z_{ij} \cdot \sigma$; $Z_{ij} \sim N(0,1)$ med uavhengige Z_{ij} gir modellen. Størrelsen β_i er en blokk-effekt, dvs gitt av egenskapene til jorda. μ_j er egenskaper til gjødseltypene. $j = 1, 2, 3 = k$. $i = 1, \dots, b$.

b) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ betyr at gjødseltypene er likeverdige.

c) Ved nivå α skal H_0 forkastes dersom $F_{1-\alpha, k-1, (b-1)(k-1)} \leq (b-1)(k-1) SSTR / [(k-1) SSE]$

$SSE = \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{i \cdot} + \bar{X})^2$; $SSTR = b \cdot \sum_j (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2$

3,5

d) Testen er naturlig fordi en ikke ønsker at variabel jordkvalitet skal spille noen rolle.

e) Modellen kan være som før, men antagelsen om normalitet fjernes: Z_{ij} er uavhengige med lik fordeling, men fordelingen er vilkårlig, men $E(Z_{ij}) = 0$ og symmetrisk.
Alternativt: $E(X_{ij}) = \mu_j + \beta_i$ og i.i.d. X_{ij}'er.

f) La R_{ij} være rangen til X_{ij} i blokk i. M.a.o. er verdiene til R_{ij} i $\{1,2,3\}$. Forkast H_0 dersom

$$\chi^2_{1-\alpha, k-1} \leq \frac{12}{bk(k+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k} R_{\cdot j}^2 - 3b\cdot(k+1)$$

(Friedman test)

Oppgave 4 Bruker 0, 30, 60, 107 og 1,14 ..., 2,36 millioner i tallarbeidet.

a)

$$b_e = \frac{4\cdot\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{4\cdot\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \approx 0{,}0115\cdot 10^6 / \text{år}$$

$a = \cancel{1{,}14 \text{ millioner}}$ 1,12 $\quad y = a + bx \quad (2{,}35 ; 107)$

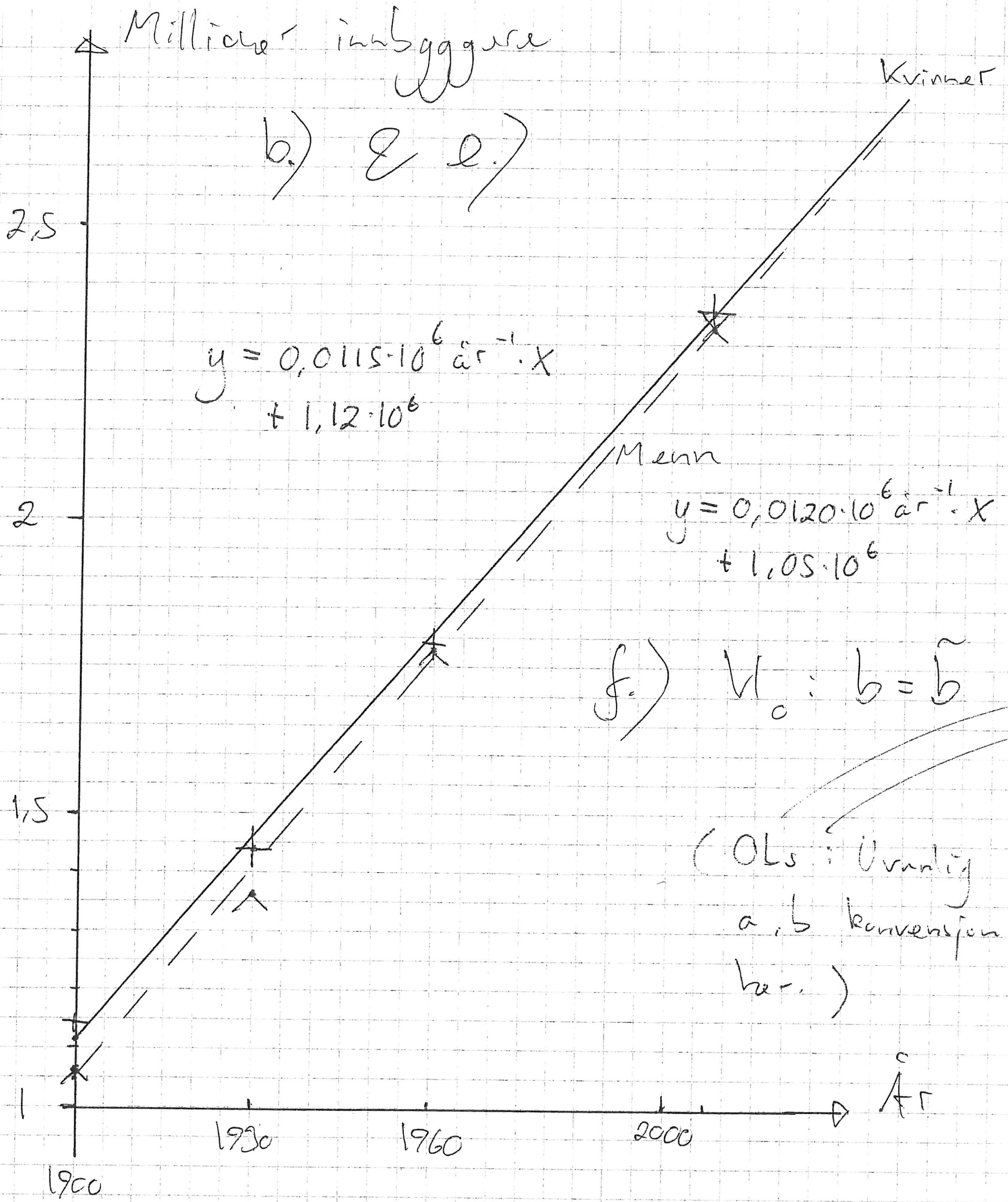
c) Antar $Y_i = a + bx_i + \sigma Z_i$, $Z_i \sim N(0,1)$ uavhengige, $i = 1, \ldots, n = 4$.

d) $\tilde{b}_e = 0{,}0120\cdot 10^6 / \text{år}$ $\quad \tilde{a} = \cancel{1{,}07}$ 1,05

(2,33 ; 107)

4/8

b.) & e.)



f.) $H_0 : b = \tilde{b}$

(OLS: Uvanlig a,b konvensjon her.)

Fig. 1 Litt ulikt stigningstall, men er det signifikant?

g) $$s^2 \cdot 4 = \sum_{i=1}^{4} \left[(y_i - (a + b x_i))^2 + (\tilde{y}_i - (\tilde{a} + \tilde{b} x_i))^2 \right]$$

Forkast H_0 dersom

$$2{,}78 = t_{\alpha/2}(4) \leq |b_e - \tilde{b}_e| / s\sqrt{2 / \sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2}$$

S/S