Des17st1201

1

a)

| Source | df | SS | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| Treatment | 3 | 56,38 | 18,79 | 0,57 |
| Error | 16 | 525,08 | 32,82 | |
| Total | 19 | 581,46 | | |

$df = SS/MS = 56{,}38/18{,}79 \approx 3$

$df = 19-3 = 16$

$SS = MS \cdot df = 32{,}82 \cdot 16 \approx 525{,}12$

$SS = 581{,}46 - 56{,}38 \approx 525{,}08$ (Check)

$F = 18{,}79/32{,}82 \approx 0{,}5725$

b) $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

versus $H_1$: Ikke alle like.

c) $f_{5\%,3,16} = 3{,}24 > 0{,}57 \therefore H_0$ forkastes ikke.

d) $n_k = \frac{20}{4} = 5$

e) For 1 tilfeldig utvalg fra 1 normal-fordeling er sinneligheitsfunksjonen:

$$L = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right) e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\cdot[\hat{\sigma}^2 + (\hat{\mu}-\mu)^2]}$$

hvor $\hat{\mu} = \bar{x}$ og $n\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

For $k$ $(=4)$ tilfeldige utvalg blir rimelighetsfunksjonen:

$$L = \prod_{j=1}^{k} L_j = \prod_j \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n_j/2} \cdot e^{-\frac{n_j}{2\sigma^2}[\hat\sigma_j^2 + (\hat\mu_j - \mu_j)^2]}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-\frac{n}{2\sigma^2}[\hat\sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_j n_j (\hat\mu_j - \mu_j)^2]}$$

Faktoriseringsteoremet sier da at $\hat\mu_1, \dots, \hat\mu_k$ og $\hat\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \hat\sigma_j^2$ er en suffisient statistikk med $k+1$ komponenter. Regningen videre viser at variansanalysen er basert på denne.

f) Rimeligheten til $H_0$ er

$$\lambda = \frac{\hat L_0}{\hat L} = \left(\frac{\hat\sigma^2}{\hat\sigma_0^2}\right)^{n/2} = \left(\frac{1}{1 + \frac{SSTR}{SSE}}\right)^{n/2}$$

fordi

$$\frac{1}{n}\sum_j n_j (\hat\mu_j - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_j n_j (\hat\mu_j - \hat\mu)^2 + \frac{1}{n}\sum_j n_j \cdot (\hat\mu - \mu)^2$$

$$\hat\sigma_0^2 = \hat\sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot (\hat\mu_j - \hat\mu)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot SSE + \frac{1}{n} \cdot SSTR$$

$$\lambda \leq \lambda_c \iff \frac{SSTR}{SSE} \cdot \frac{n-k}{k-1} = F \geq F_{\alpha, n-k, k-1}$$

Liten rimelighet $\lambda$ er ekvivalent med stor F verdi.

g) Utfallsrommet er $\mathbb{R}^{20}$ tilsvarende de $4 \times 5$ observasjonene.

h) Modellparameterrommet er

$$\Omega_\theta = \{(\mu_1, \dots, \mu_4, \sigma) \mid \mu \in \mathbb{R}^4, \sigma > 0\}$$
$$= \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}_+$$

Kommentar: I forbindelse med rimelighets-estimat og $\hat{L}_0 / \hat{L}$ ble det benyttet at

$$\psi(\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-\frac{n}{2} \cdot \frac{K}{\sigma^2}}$$

har maksimum ved $\sigma^2 = K$. Dette følger ved drøfting, alternativt forenklet via

$$\varphi(x) = x \cdot e^{-x} \qquad x > 0$$

som har maksimum ved $x = 1$.

2

a) Randomisert blokk design for å kontrollere for effekten av undersøkelses-utførelse/sted når effekten av smakstilsetningen: $Y_{ij} = \beta_i + \mu_j + \sigma Z_{ij}$, $Z_{ij} \overset{u}{\sim} N(0,1)$.
sted + smak + 'målefeil'

b) Innenfor $\Omega_\theta = \{(\beta, \mu, \sigma) \mid \beta \in \mathbb{R}^5, \mu \in \mathbb{R}^4, \sigma > 0\}$ testen hypotesen A $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_4$ i første linje og hypotesen B $\beta_1 = \dots = \beta_5$ i andre linje

c) $f_{5\%,3,12} = 3,49 \le 7,58$ A forkastes

$f_{5\%,4,12} = 3,26 \le 49,93$ B forkastes

d) I oppgave ble det ikke kontrollert for effekten av sted/survey. Variasjonen ble da så stor at en ikke kunne se signifikant forskjell på smakene, men i den nye analysen er det en forskjell.

e) Friedman testen baserer seg på rang for hver undersøkelse/survey. Fra tabellen i oppgaven finnes

| Survey | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 5 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| Rangsum | 10 | 17 | 16 | 7 |

Her er det $b=5$ (blokker) og $k=4$ (treatment = smak). Teststatistikk:

$$g = \frac{12}{5\cdot 4\cdot 5}\cdot(10^2+17^2+16^2+7^2) - 3\cdot 5\cdot 5 = 8{,}28$$

$$\geq \chi^2_{5\%,3} = 7{,}815$$, d.v.s. nullhypotesen om like medianer forkastes. Det er signifikant (5% nivå) forskjell på de ulike smakene.

f.) Modellen i (1) er et dårlig valg fordi stedet har for stor betydning, men det kan diskuteres begge veier avhengig av anvendelsen. Modellen i b) er bedre fordi effekten av sted kontrolleres for. Modellen i e) er å foretrekke fordi normalantagelsen er diskutabel. Målingene er strengt tatt mange Bernoulli (0/1 data) eksperiment (800 x 5 stykker) og en mer realistisk analyse er mulig men oppgaven ber ikke om dette.

3

a) $\hat{\mu} = (2{,}092 + \cdots + 2{,}107)/10 \approx 2{,}0951$

Perioden estimeres til 2,10 s (2,095 s)

b) $u(\hat{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, s \approx 0{,}0018$ $\quad 1{,}8 \cdot 10^{-3}$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\overline{x^2} - \bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left[2{,}092^2 + \cdots + 2{,}107^2\right] - \frac{10}{9} \cdot 2{,}0951^2$$

$$\approx 3{,}3656 \cdot 10^{-5}, \quad s \approx 0{,}0058$$

Standard usikkerhet er 0,002 s

c) Dekningsfaktoren er $t_{2{,}5\%,\,9} = 2{,}262 = k$

d) gir utvidet usikkerhet

$U(\hat{\mu}) = k \cdot u(\hat{\mu}) \approx 0{,}004$

konfidensintervall $[2{,}091\,;\,2{,}099]$ s og c)

e) $H_0$ forkastes p.g.a. $2 \notin$ intervall 95%

Alt.: $t_{stat}$ 51,86 > 2,26 evnt. p-verdi < 5%.

f) $L = \prod_i \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat\sigma}\right) \cdot e^{-(x_i-\mu)^2/2\sigma^2}$

$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-[\hat\sigma^2 + (\bar{x}-\mu)^2]\frac{n}{2\sigma^2}}$

Faktoriseringsteoremet gir da at empirisk middel $\bar{x}$ og varians $\hat\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ er suffisiente.

$t=(\bar{x}, \hat\sigma^2)$ inneholder all informasjon om $\theta=(\mu, \sigma^2)$.

[ $L = g(t,\theta)\cdot h(x)$.

I oppgaven er $h(x) = 1$ ]

Merknad: Her er det benyttet at

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2$

$= \frac{1}{n}\sum_i(x_i-\bar{x})^2 + (\bar{x}-\mu)^2$

$= \hat\sigma^2 + (\bar{x}-\mu)^2$ via ortogonale vektorer