NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **ST1201/ST6201 Statistiske metoder**

Fagleg kontakt under eksamen: Nikolai Ushakov

Tlf: 45128897

Eksamensdato: 20. desember 2016

Eksamenstid (frå–til): 09:00 – 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C:
– Tabeller og formler i statistikk, Tapir forlag,
– K.Rottman. Matematisk formelsamling,
– Stempla gult A4-ark med egne håndskrevne formlar og notat,
– Kalkulator: HP30S, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller Casio fx-82ES PLUS.

Annan informasjon:

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐

Dato Sign

Oppgåve 1

I eit laboratorium blir eit løysingsmiddel brukt som skal ha $p\text{H} = 7.45$. Det blir tatt n prøvar av eit parti av løysingsmiddelet, og i kvar prøve blir pH målt. Målingane, $X_1, X_2, ..., X_n$, er uavhengige og normalfordelte med forventningsverdi μ, som er pH i løysingsmiddelet, og standardavvik 0.05 (som botnar i måleutryggleik).

Ein utfører ein hypotesetest med nullhypotese $\mu = 7.45$ mot den alternative hypotesen $\mu > 7.45$. Dersom nullhypotesen blir forkasta med signifikansnivå $0,05$, blir partiet kassert.

a) Foreslå korleis ein slik hypotesetest basert på gjennomsnittet $\bar{X}$ av målingane kan gjennomførast. Kva blir konklusjonen dersom det blir tatt $n = 20$ prøvar og gjennomsnittet av målingane er 7.47?

b) Kva er sannsynet for at nullhypotesen blir forkasta dersom det blir tatt $n = 20$ prøvar og pH i løysingsmiddelet er $\mu = 7.47$?

c) Anta at pH i løysingsmiddelet er $\mu = 7.47$. Kor mange prøvar, n, må ein ta for at sannsynet for at nullhypotesen blir forkasta skal vere større enn 0.8?

Oppgåve 2

La $X_1, X_2, ..., X_n$ vere eit tilfeldig utvalg frå ei normalfordeling med (kjent) forventning $E(X_i) = 1$ og (ukjent) varians $\text{Var}(X_i) = \theta$. Ein ønskjer å nytte dei observerte verdiane til å teste

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{mot} \quad H_1 : \theta \neq 1.$$

a) Bruk

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1)^2$$

som testobservator og bestem ein beslutningsregel for når ein skal forkaste H_0. Bruk signifikansnivå α.

Utlei styrkefunksjonen for denne testen.

b) Finn sannsynlighetskvote (generalised likelihood ratio (GLR)), λ, for H_0 og H_1 som gitt over.

Forklar kvifor testen du utleidde i punkt **a**) ikkje er ein sannsynlighetskvote test (generalised likelihood ratio test (GLRT)).

Oppgåve 3

På eit laboratorium blir samanhengen mellom reaksjonsfart Y (i mikromol pr. time) og konsentrasjonen x (i mikromol pr. dm^3) av ein katalysator undersøkt. Det blir gjort 10 målingar av reaksjonsfart Y_i og konsentrasjon x_i, $1 \leq i \leq 10$. Anta at para av målingar er uavhengige, og at Y_i er normalfordelt med forventningsverdi $\alpha + \beta x_i$ og standardavvik σ, der α, β og σ er ukjende parametrar.

a) Forklar kort kva minste kvadrats metode for estimering av α og β går ut på.

Med minste kvadrats metode blir β estimert til 1.12. Variansen σ^2 blir estimert til 2.3, og

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 4.1$$

(det vil seie at 2.3/4.1 er eit estimat av variansen til estimatoren til β)

b) Utfør ein hypotesetest for å undersøkje om det er nokon samanheng mellom x og Y. Bruk signifikansnivå 0.05.

Oppgåve 4

I denne oppgåva skal vi sjå på ein regresjonsmodell som er noko modifisert i tilhøve til han som er handsama i læreboka. Gå ut ifrå at vi har variabelpar $(x_1, Y_1), ..., (x_n, Y_n)$ der $x_1, ..., x_n$ ikkje betraktes som stokastiske, medan $Y_1, ..., Y_n$ blir anteke å vere uavhengige stokastiske normalfordelte variablar med

$$E(Y_i) = \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) \text{ og } \operatorname{Var}(Y_i) = \sigma_0^2.$$

Her er $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$, verda til dei to parametrane α og β blir anteke ukjende, medan variansen σ_0^2 blir anteke å ha eit kjent verd.

a) Utlei sannsynsmaksimeringsestimatorane (SME) for α og β og vis spesielt at estimatoren for β kan skrivast på forma

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Vis at variansen til $\hat{\beta}$ kan skrivast på forma

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

b) Kva for ein sannsynsfordeling har $\hat{\beta}$? Gje grunn for svaret.

Utlei eit $(1-\delta)\cdot 100\%$ konfidensintervall for β.

Oppgåve 5

Følgjande tabell er ein delvis utfylt variansanalysetabell (ANOVA-tabell) der noko informasjon er mistet (stjerner).

Source	df	SS	MS	F
Treatment	$\star$	24.48	8.16	$\star$
Error	40	$\star$	5.1	
Total	$\star$	$\star$		

a) Skriv opp den fullstendige ANOVA-tabellen. Vis korleis du reknar ut verda der det står $\star$ i tabellen.

Utfør hypotesetesten for

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4.$$

Signifikansnivået er $\alpha = 0.05$.