Løsning hjemmeregning 10

Oppgave 1

Vi får oppgitt at levetiden T i år til en maskindel er Weibullfordelt med

$$T \sim W\left(\beta = 0.5, \eta = 2\right)$$

a) Vi skal bestemme sannsynligheten for at en vilkårlig komponent fungerer i mer enn 5 år, dvs. vi skal finne

$$P\left(T > 5\right) = 1 - P\left(T \le 5\right)$$

Den kumulative Weibullfordelingen finner vi fra formelarket:

$$P\left(T \le t\right) = F\left(t\right) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}},$$

som gir at sannsynligheten for at komponenten varer i mer enn 5 år blir lik

$$\begin{aligned} P\left(T > 5\right) &= 1 - P\left(T \le 5\right) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{5}{\eta}\right)^{\beta}}\right) \\ &= e^{-\left(\frac{5}{\eta}\right)^{\beta}} \\ &= e^{-\left(\frac{5}{2}\right)^{0.5}} \\ &= \underline{\underline{0.21}} \end{aligned}$$

b) Vi skal finne sannsynligheten for at minst én av 10 uavhengige komponentener, som ble kjøpt inn samtidig, varer i mer enn 5 år. Hvis X angir antallet komponenter som virker etter 5 år, er X binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 0.21$. Vi skal altså finne

$$P\left(X \ge 1\right) = 1 - P\left(X = 0\right),$$

der vi kan bruke den binomiske punktfordelingen

$$P\left(X = x\right) = \binom{n}{x} p^{x} \left(1 - p\right)^{n-x} = \binom{10}{x} \cdot 0.21^{x} \left(1 - 0.21\right)^{10-x}$$

Sannsynligheten for at minst én komponent virker etter 5 år blir altså:

$$\begin{aligned} P\left(X \ge 1\right) &= 1 - P\left(X = 0\right) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.21^{0} \left(1 - 0.21\right)^{10-0} \\ &= \underline{\underline{0.91}} \end{aligned}$$

c) Forventningsverdien til levetiden er (fra formelarket)

$$\mu = E(T) = \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

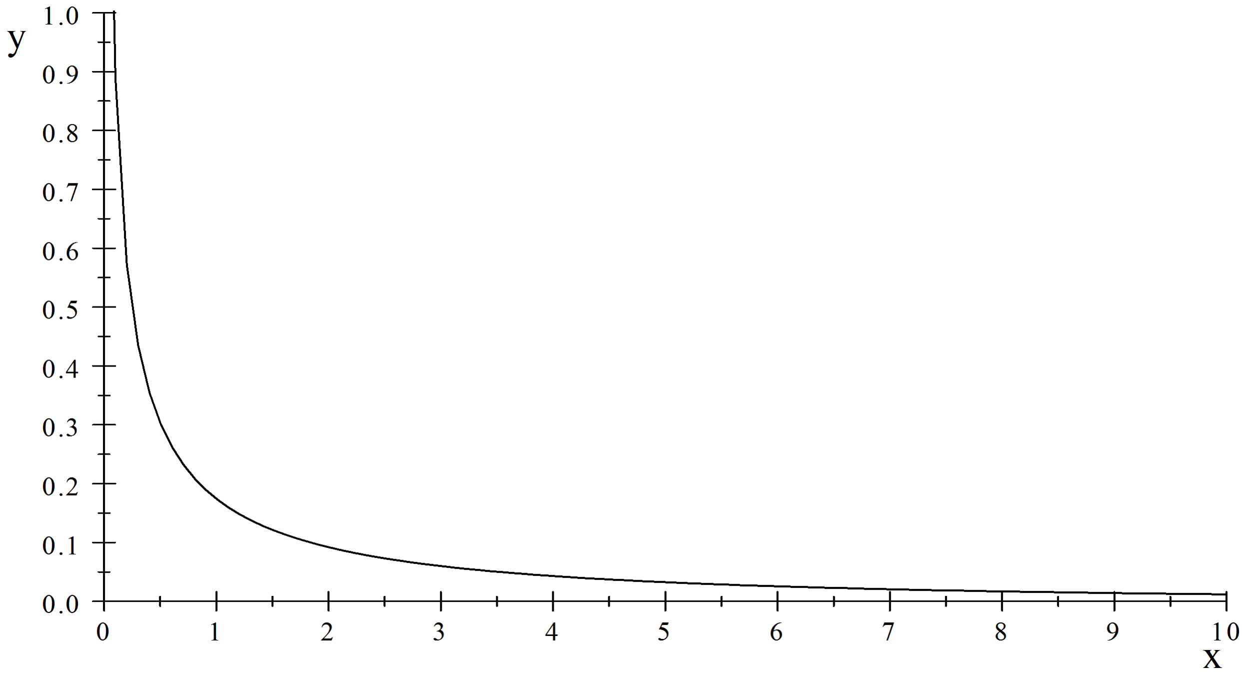
der verdiene for gammafunksjonen finnes tabulert på formelarket (dersom argumentet blir heltallig, bruker vi at $\Gamma(z) = (z-1)!$). Vi får:

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{0.5}\right) \\ &= 2 \cdot \Gamma(3) \\ &= 2 \cdot (3-1)! \text{ (bruker at } \Gamma(z) = (z-1)!) \\ &= 2 \cdot 2! \\ &= \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

Forventet levetid er 4 år.

d) Skisserer Weibullfordelingen, dvs. sannsynlighetstettheten $f(t)$ gitt ved

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\beta}{\eta^{\beta}} t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \\ &= \frac{0.5}{2^{0.5}} t^{0.5-1} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^{0.5}} \end{aligned}$$



Oppgave 2

Vi får oppgitt at tiden T mellom feil som oppstår i en robotsveisingsprosess er Weibull-fordelt med

$$T \sim W(\beta = 3, \eta = 10)$$

a) Vi skal finne sannsynligheten for at tiden mellom feil er mindre enn 5 timer. Her trenger vi den kumulative Weibullfordelinga:

$$P(T \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Denne gir at

$$\begin{aligned} P(T < 5) &= 1 - e^{-\left(\frac{5}{\eta}\right)^{\beta}} \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{5}{10}\right)^{3}} \\ &= \underline{\underline{0.12}} \end{aligned}$$

b) Vi skal finne sannsynligheten for at det går minst 2 timer mellom feilene, dvs. vi skal finne

$$\begin{aligned} P(T \geq 2) &= 1 - P(T < 2) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{\eta}\right)^{\beta}}\right) \text{ (fra den kumulative fordelinga)} \\ &= e^{-\left(\frac{2}{\eta}\right)^{\beta}} \\ &= e^{-\left(\frac{2}{10}\right)^{3}} \\ &= \underline{\underline{0.99}} \end{aligned}$$

c) Sannsynligheten for at tiden mellom feil ligger mellom 6 og 15 timer blir

$$\begin{aligned} P(6 < T < 15) &= P(T < 15) - P(T < 6) \text{ (standard omskriving for "dobbel ulikhet")} \\ &= \left(1 - e^{-\left(\frac{15}{\eta}\right)^{\beta}}\right) - \left(1 - e^{-\left(\frac{6}{\eta}\right)^{\beta}}\right) \text{ (bruker kumulativ fordeling)} \\ &= e^{-\left(\frac{6}{\eta}\right)^{\beta}} - e^{-\left(\frac{15}{\eta}\right)^{\beta}} \text{ (regner sammen)} \\ &= e^{-\left(\frac{6}{10}\right)^{3}} - e^{-\left(\frac{15}{10}\right)^{3}} \\ &= \underline{\underline{0.77}} \end{aligned}$$