Løsning hjemmeregning 2

Oppgave 1

Sannsynligheten for at én av de fire motorene stopper, er oppgitt til $p = 0.0012$. Dronen havarerer dersom minst én motor havarerer, og vi skal finne sannsynligheten for havari. Vi kan her forutsette at motorene svikter uavhengig av hverandre. Vi kan innføre hendelsene

$$\begin{aligned} A &: \text{motor 1 svikter} \\ B &: \text{motor 2 svikter} \\ C &: \text{motor 3 svikter} \\ D &: \text{motor 4 svikter.} \end{aligned}$$

Vi har at

$$\begin{aligned} P(\text{havari}) &= P(\text{minst en motor svikter}) \\ &= 1 - P(\text{ingen motorer svikter}) \end{aligned}$$

Hendelsen "ingen motorer svikter" innebærer at alle 4 motorer virker samtidig, og dersom de fire motorene antas uavhengige av hverandre, er sannsynligheten for dette lik

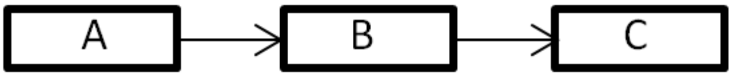
$$\begin{aligned} P(\text{ingen motorer svikter}) &= P\left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}\right) \\ &= P\left(\bar{A}\right) \cdot P\left(\bar{B}\right) \cdot P\left(\bar{C}\right) \cdot P\left(\bar{D}\right) \;\; \text{(uavhengighet)} \\ &= (1 - 0.0012)^4 \\ &= \underline{0.99521} \end{aligned}$$

Det gir at

$$\begin{aligned} P\left(\text{havari}\right) &= 1 - P\left(\text{ingen motorer svikter}\right) \\ &= 1 - 0.99521 \\ &\approx \underline{\underline{0.0048}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a)



Ettersom produksjonsstasjonene er seriekoblet, vil produksjonen stoppe opp dersom én av stasjonene stopper opp. Hvis vi definerer hendelsen

$$S: \text{ produksjonen stopper opp,}$$

kan vi skrive at

$$p\left(S\right) = 1 - p\left(\bar{S}\right)$$

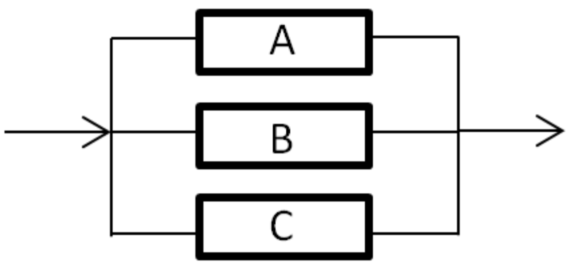
Hendelsen $\bar{S}$, altså at produksjonen ikke stopper opp, krever at **alle** stasjonene **virker**. Ettersom sannsynligheten for at én stasjon virker er $1 - 0.05 = 0.95$, og stasjonene antas å være uavhengige av hverandre, er sannsynligheten for $\bar{S}$ lik

$$p\left(\bar{S}\right) = 0.95^6$$

Sannsynligheten for produksjonsstopp er altså

$$\begin{aligned} p\left(S\right) &= 1 - p\left(\bar{S}\right) \\ &= 1 - 0.95^6 \\ &\approx \underline{\underline{0.26}} \end{aligned}$$

b)



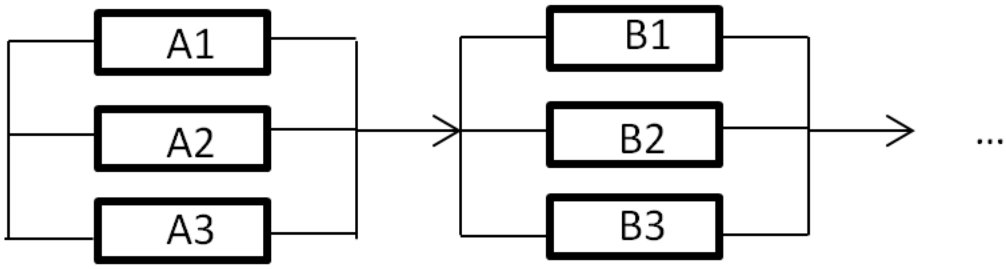
Vi definerer hendelsen S som

$$S\text{: systemet svikter (dvs. man får ikke tatt ut penger)}$$

Dersom vi har 6 uavhengige valutaautomater der sannsynligheten for at én svikter er 0.05, blir

$$\begin{aligned} P(S) &= P(\text{alle automatene svikter samtidig}) \\ &= 0.05^6 \text{ (automatene er uavhengige)} \\ &= \underline{\underline{1.6 \cdot 10^{-8}}} \end{aligned}$$

c) Vi tenker oss nå altså at arbeidsstasjonene er "parallellkoblinger koblet i serie":



For at arbeidsstasjon A skal svikte, må **alle** elementene A1, A2 og A3 svikte. Hvis vi definerer hendelsene

$$\begin{aligned} A &: \text{ arbeidsstasjon } A \text{ svikter, slik at } \bar{A}\text{: arbeidsstasjon A er operativ} \\ A1 &: \text{ element } A1 \text{ svikter} \\ A2 &: \text{ element } A2 \text{ svikter} \\ A3 &: \text{ element } A3 \text{ svikter,} \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A1 \cap A2 \cap A3) \\ &= P(A1) \cdot P(A2) \cdot P(A3) \text{ (elementene er uavhengige)} \\ &= \underline{0.05^3} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at arbeidsstasjon A er operativ, er da

$$P(\bar{A}) = \underline{1 - 0.05^3}$$

Som før stopper produksjonen opp dersom én av arbeidsstasjonene stopper opp, dvs. vi kan bruke samme tenkemåte som i oppgave A: hvis vi definerer hendelsen

$$S: \text{ produksjonen stopper opp,}$$

så har vi at
$$P(S) = 1 - P(\bar{S}),$$
der $p(\bar{S})$ er sannsynligheten for at produksjonen går som normalt, dvs. sannsynligheten for at alle stasjonene er operative. Ettersom vi har 6 uavhengige arbeidsstasjoner med lik sannsynlighet for svikt/ikke svikt, har vi at

$$\begin{aligned} p(\bar{S}) &= P(\text{alle stasjonene er operative}) \\ &= P(\text{A er operativ}) \cdot P(B \text{ er operativ}) \cdots P(F \text{ er operativ}) \\ &= \left(1 - 0.05^3\right)^6 \end{aligned}$$

Endelig får vi at

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - P(\bar{S}) \\ &= 1 - \left(1 - 0.05^3\right)^6 \\ &= \underline{\underline{7.5 \cdot 10^{-4}}} \end{aligned}$$

Altså betydelig lavere sannsynlighet for systemsvikt enn i oppgave a).

Oppgave 3

Innfører hendelsene

$$\begin{aligned} U &: \text{ personen snakker usant, } \bar{U}: \text{ personen snakker sant} \\ L &: \text{ løgndetektoren viser ”løgn”, } \bar{L}: \text{ løgndetektoren viser ”sant”} \end{aligned}$$

Vi har fått oppgitt sannsynlighetene

$$\begin{aligned} P(L|U) &= 0.80 \\ P(\bar{L}|\bar{U}) &= 0.90 \\ P(U) &= 0.05 \end{aligned}$$

a) Vi skal bestemme $P(L)$, dvs. sannsynligheten for at løgndetektoren gir utslag ”løgn” for en tilfeldig valgt person. Vi bruker loven om total sannsynlighet:

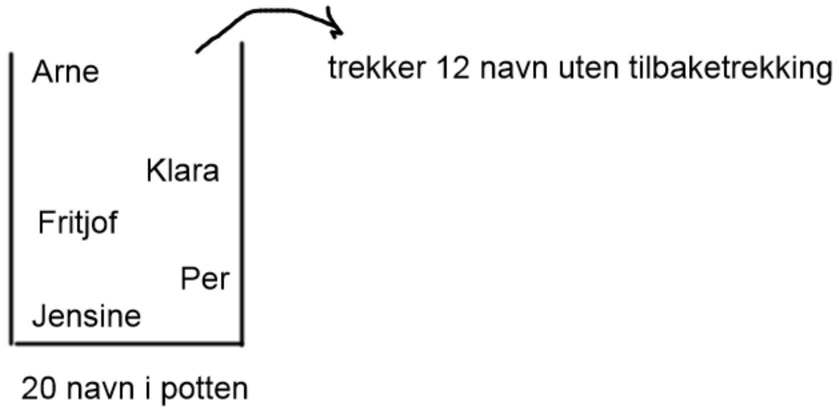
$$\begin{aligned} P(L) &= P(L|U) \cdot P(U) + P(L|\bar{U}) \cdot P(\bar{U}) \\ &= 0.80 \cdot 0.05 + 0.10 \cdot 0.95 \\ &= \underline{0.135} \\ &\approx \underline{\underline{0.14}} \end{aligned}$$

b) Vi skal bestemme sannsynligheten for at personen snakker sant når detektoren viser "løgn", dvs. $P\left(\bar{U}|L\right)$. Den "motsatte" betingede sannsynligheten $P\left(L|\bar{U}\right)$ er kjent (dvs. sannsynligheten for at løgndetektoren feilaktig viser "løgn" gitt at personen snakker sant, som vi tidligere i oppgaven påviste er lik $P\left(L|\bar{U}\right) = 0.10$), og da kan vi bruke Bayes' setning:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{U}|L\right) &= \frac{P\left(L|\bar{U}\right)\cdot P\left(\bar{U}\right)}{P\left(L\right)} \\ &= \frac{0.10\cdot 0.95}{0.14} \\ &= \underline{\underline{0.68}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Vi skal fordele 12 bokskap blant 20 medlemmer på en slik måte at vi tar hensyn til hvem som får hvilket skap (dvs. situasjonen "Per har skap 1 og Arne har skap 2" er forskjellige fra "Arne har skap 1 og Per har skap 2)"). Her skal vi altså gjøre et ordnet utvalg uten tilbakelegging av 12 elementer (dvs. de medlemmene som faktisk får et bokskap) fra totalt 20 medlemmer.



Vi kan tenke oss at vi trekker ut 12 navn på studenter trekkes fra en eske med totalt 20 navn. De 12 som trekkes, får et bokskap.

Antall ordnede utvalg blir da

$$20\cdot 19\cdot 17\cdot\cdots\cdot(20-12+1)$$

Finner denne på kalkulator med $n\mathrm{P}r$-funksjonen, slik at antall måter å fordele bokskapene på blir:

$$20n\mathrm{P}r12 = \underline{\underline{6.03\cdot 10^{13}}}$$

b) Fordeler de 12 bokskapene på en slik måte at hvem som har hvilket bokskap, ikke spiller noen rolle. Vi gjør da et uordnet utvalg av 12 fra totalt 20 elementer, og antallet måter å gjøre dette på er

$$\binom{20}{12} = \underline{\underline{125970}}$$

Her har vi brukt nCr-knappen på kalkulator til å finne verdien til binomialkoeffisienten.

c) Ettersom det er 12 bokskap ("gunstige") og 20 studenter ("mulige"), blir sannsynligheten P for at en tilfeldig student får tildelt et bokskap lik

$$P = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \underline{\underline{0.6}}$$