Løsning hjemmeregning 3

Oppgave 1

Vi kaster to firesidede terninger, og X angir summen av tallene vi får på to kast. Utfallsrommet for de to kastene er (her angir f.eks. "12" at vi får 1 på første kast, og 2 på neste osv.)

$$\{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\},$$

De mulige summene fordelt på de ulike kastene:

Kast	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44
Sum	2	3	4	5	3	4	5	6	4	5	6	7	5	6	7	8

Punktsannsynlighetene $P(X = x)$ blir derfor som følger:

x	$P(X = x)$
2	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
4	$\frac{3}{16}$
5	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
6	$\frac{3}{16}$
7	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
8	$\frac{1}{16}$

Oppgave 2

Vi skal finne forventningsverdien for to ulike spill der det kastes to av de firkantede terningene i forrige oppgave: i ett spill er utbetalt gevinst lik $2X$, og i det andre er gevinsten X^2. Vi skal bestemme hvilket spill som gir høyest forventet gevinst.

Spill 1: forventningsverdien for variabelen $2X$ er

$$\begin{aligned}
E(2X) &= 2 \cdot E(X) \text{ (regneregel for forventningsverdier)} \\
&= 2 \cdot (2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) + 5 \cdot P(X = 5) + 6 \cdot P(X = 6) \\
&\quad +7 \cdot P(X = 7) + 8 \cdot P(X = 8)) \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{16} + +3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{3}{16} + 7 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16}\right) \\
&= \underline{10}
\end{aligned}$$

Spill 2: forventningsverdien for variabelen (premien) $\frac{1}{2}X^2 - X$ er, via regneregelen

$E\left(g\left(X\right)\right)=\sum g\left(x\right)\cdot P\left(X=x\right)$, lik

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{2}X^2-X\right) &= \left(\frac{1}{2}2^2-2\right)\cdot P\left(X=2\right)+\left(\frac{1}{2}3^2-3\right)\cdot P\left(X=3\right)+\left(\frac{1}{2}4^2-4\right)\cdot P\left(X=4\right)+\left(\frac{1}{2}5^2-\right. \\
&\quad +\left(\frac{1}{2}6^2-6\right)\cdot P\left(X=6\right)+\left(\frac{1}{2}7^2-7\right)\cdot P\left(X=7\right)+\left(\frac{1}{2}8^2-8\right)\cdot P\left(X=8\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}2^2-2\right)\cdot\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{2}3^2-3\right)\cdot\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{2}4^2-4\right)\cdot\frac{3}{16}+\left(\frac{1}{2}5^2-5\right)\cdot\frac{1}{4} \\
&\quad +\left(\frac{1}{2}6^2-6\right)\cdot\frac{3}{16}+\left(\frac{1}{2}7^2-7\right)\cdot\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{2}8^2-8\right)\cdot\frac{1}{16} \\
&= \frac{35}{4} \\
&= \underline{8.75}
\end{aligned}
$$

Spill 1 har altså høyest forventet gevinst.

Oppgave 3

En forhandler skal kjøpe inn et antall iPhone, der 7.5 % antas å ha en produksjonsfeil.

a) Sannsynligheten for at en iPhone er feilfri er $p=1-0.075=0.925$. Hvis X betegner antall feilfrie telefoner som kjøpes inn, er X binomisk fordelt - dersom vi antar at telefonene produseres uavhengig av hverandre med lik sannsynlighet for produksjonsfeil; utfallet av hvert "forsøk" (innkjøp) er enten "feilfri" eller "ikke feilfri". Vi skal bestemme antall "forsøk" n (telefoner som må kjøpes inn) for at forventet antall feilfrie telefoner er lik 100.

Forventningsverdien til en binomisk variabel X med antall forsøk n og sannsynlighet p er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\mu &= E\left(X\right)=np\Rightarrow n=\frac{\mu}{p} \\
n &= \frac{100}{0.925}=108.11\approx\underline{108}
\end{aligned}
$$

Det må kjøpes inn et parti på 108 telefoner for at forventet antall feilfrie telefoner skal være 100.

$$
\begin{aligned}
P\left(X\geq 100\right) &= 1-P\left(X<100\right) \\
&= 1-P\left(X\leq 99\right)\ \text{(fordi } X \text{ er diskret)}
\end{aligned}
$$

Vi kan finne den kumulative sannsynligheten $P\left(X\leq 99\right)$ på kalkulator:

På Casio: meny STAT -> DIST-> BINM -> Bcd -> velg Data: Variable

```
Binomial C.D
Data    :Variable
x       :99
Numtrial:108
p       :0.925
Save Res:None
Execute
CALC
```

Vi legger inn $x = 99, n = 108$ og $p = 0.925$ og trykker Execute.

```
Binomial C.D
    p=0.42189312
```

På Texas: knapp 2nd+Vars (gir meny Distr) -> velg binomcdf i lista -> tast inn `binomcdf(108,0.925,99)`.

Vi får svaret $P(X \leq 99) = 0.422$, slik at

$$\begin{aligned} P(X \geq 100) &= 1 - P(X \leq 99) \\ &= 1 - 0.422 \\ &= 0.578 \\ &\approx \underline{\underline{0.58}} \end{aligned}$$