Løsning hjemmeregning 4

Oppgave 1

a) Sannsynligheten for å finne 7 rette i Lotto tilsvarer sannsynligheten for å trekke ut én vinnerrekke av alle de mulige vinnerrekkene. En vinnerrekke framkommer som et uordnet utvalg uten tilbaketrekking av 7 kuler fra totalt. Antall måter man kan gjøre en slik trekning på, er

$$\binom{34}{7} = 5379\,616$$

Sannsynligheten for å få 7 rette er derfor

$$\begin{aligned} P\,(\text{sju rette}) &= \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} \\ &= \frac{1}{\binom{34}{7}} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{5379616}}} \end{aligned}$$

b) La X angi antall vinnere (dvs. vinnerrekker) i løpet av en lottotrekning. Under forutsetning av at alle lottorekkene spiller uavhengig av hverandre, er X binomisk fordelt (n uavhengige delforsøk; hver er en "suksess"/"ikke suksess", dvs. kun to mulige utfall). Med $p = \frac{1}{5379616}$ og $n = 1725653$, blir $P\,(X = x) = \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x}$, får vi at

$$\begin{aligned} P\,(\text{minst én vinner}) &= 1 - P\,(\text{ingen vinner}) \\ &= 1 - P\,(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} p^0\,(1-p)^{n-0} \\ &= 1 - (1-p)^n \quad \text{(de andre faktorene blir 1)} \end{aligned}$$

Hvis vi taster inn dette uttrykket på en kalkulator, vil svaret sannsynligvis bli 1, fordi kalkulatoren beregner $(1-p)^n$ til å bli 1 ("1 minus noe veldig lite, opphøyd i en stor potens" er tilnærmet lik 1). Vi kan bruke den oppgitte formelen fra matematikk 2:

$$(1-p)^n \approx 1 - np,$$

slik at

$$\begin{aligned} P\,(\text{minst én vinner}) &= 1 - (1-p)^n \\ &= 1 - (1 - np) \\ &= np \\ &= 1725653 \cdot \frac{1}{5379\,616} \\ &\approx \underline{\underline{0.32}} \end{aligned}$$

Dvs. vi forventer at det er minst én vinner i omtrent $\frac{1}{3}$ av trekningene.

Oppgave 2

a) Hvis X angir antall mottatte Snapchat-meldinger i løpet av en dag, er X Poisson-fordelt dersom: a) sannsynligheten for å motta en Snapchat-melding på ett tidspunkt er uavhengig av tidligere/framtidige meldinger, b) sannsynligheten for å motta 2 Snapchat-meldinger eksakt samtidig er neglisjerbar, og c) forventet antall innkommende meldinger er uavhengig av tid og sted (denne er mer tvilsom: mange sender og mottar Snapchat-meldinger på bestemte tidspunkt på dagen).

b) Vi skal beregne sannsynligheten for å motta 6 Snapchat-meldinger, dersom vi i gjennomsnitt mottar 3. Altså: X antas Poisson-fordelt med $\lambda = 3$, slik at

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \frac{3^x e^{-3}}{x!} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for å motta 6 meldinger er altså

$$\begin{aligned} P(X = 6) &= \frac{3^6 e^{-3}}{6!} \\ &= \underline{\underline{0.050}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Hvis X angir antall kjøretøy som passerer brua per minutt, er det rimelig å anta at X er Poisson-fordelt med parameter

$$\lambda = \frac{50400}{24 \cdot 60} = \underline{35},$$

slik at

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \frac{35^x e^{-35}}{x!} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at det skal passere 50 kjøretøy i løpet av et minutt (altså endel mer trafikk enn vanlig), er da gitt ved

$$\begin{aligned} P(X = 50) &= \frac{35^{50} e^{-35}}{50!} \\ &\approx \underline{\underline{3.3 \cdot 10^{-3}}} \end{aligned}$$

b) Sannsynligheten for at det skal passere færre enn 30 biler, altså $P(X < 30) = P(X \leq 29)$, finner vi lettest fra den kumulative fordelingen for Poisson-fordelingen på kalkulator:

På Casio: meny STAT -> DIST -> F6 -> POISN -> Pcd -> velg Data: Variable og legg inn dataene (kalkulatoren kaller forventningsverdien μ istedet for λ):

```
Poisson C.D
Data    :Variable
x       :29
μ       :35
Save Res:None
Execute
```

```
CALC
```

```
Poisson C.D
    p=0.17704545
```

På Texas: knapp 2nd+Vars (gir meny Distr) -> velg poissoncdf i lista -> tast inn `poissoncdf(35,29)`.

Vi får altså svaret

$$P(X \leq 29) \approx \underline{\underline{0.18}}$$