Løsning hjemmeregning 5

Oppgave 1

a) Vi skal finne sannsynligheten for å motta 20 telefonsamtaler i løpet av en time i en Poisson-prosess der gjennomsnittet er 12 samtaler per time. Hvis vi ser på et intervall på én time, er altså $\lambda = 12$, og sannsynligheten for minst 20 samtaler altså

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 20\right) &= 1 - P\left(X < 20\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq 19\right) \end{aligned}$$

Den kumulative sannsynligheten $P\left(X \leq 19\right)$ finner vi fra kalkulatoren (eller tabell på formelark):

$$P\left(X \leq 19\right) = 0.979,$$

slik at sannsynligheten for et telefonrush på minst 20 samtaler er lik

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 20\right) &= 1 - P\left(X \leq 19\right) \\ &= 1 - 0.979 \\ &= \underline{\underline{0.021}} \end{aligned}$$

b) Vi skal beregne sannsynligheten for minst én innringer i løpet av en 25-minutters lunchpause. Gjennomsnittelig antall innkomne samtaler i løpet av et slikt intervall er

$$\lambda = \frac{12}{60} \cdot 25 = \underline{5},$$

slik at Poissonfordelingen blir

$$P\left(X = x\right) = \frac{5^x e^{-5}}{x!}.$$

Sannsynligheten for minst én innringing er altså

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 1\right) &= 1 - P\left(X = 0\right) \\ &= 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} \\ &= 1 - e^{-5} \\ &\approx \underline{\underline{0.99}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Tiden t det tar før telefonen ringer for første gang, antas eksponentialfordelt med $\alpha = \frac{1}{5}$, dvs. sannsynlighetsfordelingen er

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}.$$

Sannsynligheten for at den første telefonen kommer innen 10 minutter, er lik

$$\begin{aligned}
P(t \leq 10) &= \int_0^{10} f(t)\, dt \\
&= \int_0^{10} \alpha e^{-\alpha t} dt \\
&= \alpha \int_0^{10} e^{-\alpha t} dt \text{ (konstant utenfor)} \\
&= \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^{10} \quad \text{(antideriverer)} \\
&= \left[-e^{-\alpha t} \right]_0^{10} \quad \text{(forkorter bort } \alpha\text{)} \\
&= -e^{-10\alpha} - \left(-e^0 \right) \\
&= 1 - e^{-10\alpha} \\
&= 1 - e^{-10 \cdot \frac{1}{5}} \\
&= 1 - e^{-2} \\
&\approx \underline{\underline{0.86}}
\end{aligned}$$

Vi kan også bruke den oppgitte kumulative sannsynlighetsfordelingen på formelarket, dvs. $F(t) = 1 - e^{-\alpha t} = 1 - e^{-\frac{1}{5}t}$:

$$\begin{aligned}
P(t \leq 10) &= F(10) \\
&= 1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 10} \\
&= 1 - e^{-2} \\
&\approx \underline{\underline{0.86}}
\end{aligned}$$

b) Sannsynligheten for at det tar mer enn 20 minutter til den første gangen telefonen ringer, er gitt ved (bruker $F(t)$ fra formelarket):

$$\begin{aligned}
P(t \geq 20) &= 1 - P(t < 20) \\
&= 1 - F(20) \\
&= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 20} \right) \\
&= e^{-4} \\
&\approx \underline{\underline{0.018}}
\end{aligned}$$