Løsning hjemmeregning 6

Oppgave 1

Gitt at vekta X til en sykkkelramme er normalfordelt med $X \sim N(2.0, 0.050)$, der både μ og σ er oppgitt i kilo.

a) Sannsynligheten for at en tilfeldig ramme veier mer enn 2.1 kg blir

$$P(X > 2.1) = 1 - P(X \leq 2.1)$$

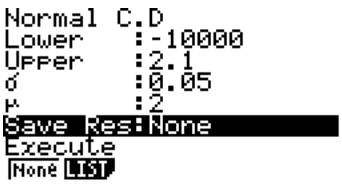
Her kan vi enten omforme til standard normalfordeling og bruke tabellene på formelarket, eller vi kan bruke den kumulative normalfordelingen på kalkulator. Viser begge deler:

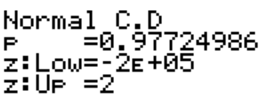
1) Standard normalfordeling:

$$\begin{aligned}
P(X > 2.1) &= 1 - P(X \leq 2.1) \\
&= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2.1-\mu}{\sigma}\right) \text{ (omformer til } N(0,1)\text{)} \\
&= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2.1-2.0}{0.050}\right) \\
&= 1 - P(Z \leq 2) \text{ (} Z \text{ er nå standard normalfordelt)} \\
&= 1 - 0.9772 \text{ (bruker } N(0,1)\text{-fordelingen på formelarket)} \\
&= 0.0228 \\
&\approx \underline{\underline{0.023}}
\end{aligned}$$

2) Kumulativ normalfordeling på kalkulator:

På Casio: meny STAT -> DIST-> NORM -> Ncd -> velg Data: Variable og legg inn dataene for nedre grense; øvre grense, σ og μ:





På Texas: knapp 2nd+Vars (gir meny Distr) -> velg normalcdf i lista -> tast inn `normalcdf(-10000,2.1,2.0,0.050)`. Vi får essensielt samme svar som via tabellen (evt. forskjeller skyldes avrundingsfeil):

$$\begin{aligned} P(X > 2.1) &= 1 - P(X \leq 2.1) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &\approx \underline{\underline{0.023}} \end{aligned}$$

b) En butikk kjøper inn 10 slike rammer. Hvis Y angir antallet rammer med vekt større enn 2.1kg, er det rimelig å anta at Y er binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 0.023$, dvs. sannsynlighetsfordelingen er

$$P(Y = y) = \binom{10}{y} \cdot 0.023^y (1 - 0.023)^{10-y}$$

Sannsynligheten for at minst 3 av rammene veier mer enn 2.1 kg blir da

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2)$$

Her kan vi enten bruke den kumulative binomiske fordelingen på kalkulator til å beregne $P(Y \leq 2)$:

På Casio: meny STAT -> DIST-> BINM -> Bcd -> velg Data: Variable

```
Binomial C.D
Data    :Variable
x       :2
Numtrial:20
p       :0.023
Save Res:None
Execute
None LIST
```

```
Binomial C.D
    p=0.98965199
```

På Texas: knapp 2nd+Vars (gir meny Distr) -> velg binomcdf i lista -> tast inn binomcdf(20,0.023,2). Vi får svaret $P(Y \leq 2) = 0.9897$, slik at

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y \leq 2) \\ &= 1 - 0.9897 \\ &= 0.0103 \\ &\approx \underline{\underline{0.010}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Vi innfører hendelsene

$$\begin{aligned} F &: \text{ enhet er feilfri} \\ R &: \text{ enhet må repareres} \\ V &: \text{ enhet må vrakes,} \end{aligned}$$

slik at

$$P(F) = 0.75,\ \ P(R) = 0.15 \text{ og } P(V) = 0.10$$

Hvis X angir bedriftens tap på én produsert enhet, er forventningsverdien (i kroner)

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = 100 \cdot P(R) + 700 \cdot P(V) \\ &= 100 \cdot 0.15 + 700 \cdot 0.10 \\ &= \underline{\underline{85}} \end{aligned}$$

Variansen er gitt ved

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2 \\ &= 100^2 \cdot P(R) + 700^2 \cdot P(V) - 85^2 \\ &= 100^2 \cdot 0.15 + 700^2 \cdot 0.10 - 85^2 \\ &= \underline{\underline{43275}} \end{aligned}$$

b) Hvis S betegner bedriftens tap på en produksjon av 100 enheter, hver med tap X_1, X_2, X_3, ..., X_{100} som alle har forventningsverdi $\mu = 85$ og varians $\sigma^2 = 43275$, vil tapet være gitt ved

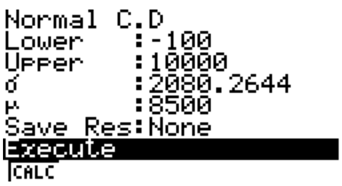
$$\sum_{i=1}^{100} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{100},$$

en slik sum av $n = 100$ uavhengige stokastiske variable vil i følge sentralgrenseteoremet være normalfordelt med $S \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right) \sim N\left(100\mu, 100\sigma^2\right)$.

c) Det forventede tapet til bedriften på én dagsproduksjon er altså $S \sim N\left(100\mu, 100\sigma^2\right) \sim N(100 \cdot 85, 100 \cdot 43275) \sim N(8500, 4327500)$. Vi skal finne sannsynligheten for at S overstiger 10 000 (kroner), dvs. vi skal beregne

$$P(S > 10000) = 1 - P(X \leq 10000)$$

Vi kan f.eks. bruke den kumulative fordelingsfunksjonen på kalkulator (se bildet under):



Vi får svaret

$$P(X \leq 10000) = 0.765,$$

slik at

$$\begin{aligned} P\left(S > 10000\right) &= 1 - P\left(X \leq 10000\right) \\ &= 1 - 0.765 \\ &= \underline{\underline{0.235}} \end{aligned}$$