Løsning øving 5

Oppgave 1

A. La oss si at vi ønsker å avgjøre hypotesetesten ved hjelp av signifikanssannsynlighet (p-verdi). Dersom signifikanssannsynligheten blir p = 0,08, skal H_0 forkastes.

Dette er FEIL - det er i tilfellet at signifikanssannsynligheten blir "liten" - mindre enn signifikansnivået α - at vi forkaster nullhypotesen. En liten verdi for p antyder at stikkprøven vi fikk er svært usannsynlig dersom H_0 er riktig - så da konkluderer vi med at H_0 er feil.

B. La oss si at vi ønsker å avgjøre hypotesetesten ved hjelp av en testobservator U_0. Dersom det viser seg at $|U_0| > u_{0,05}$, skal vi forkaste nullhypotesen.

Dette er RIKTIG - $|U_0|$ gir et tall på hvor "unormal" stikkprøven er, og hvis tallet blir større en kvantilen u_a, forkaster vi H_0.

C. La oss si at vi ønsker å avgjøre hypotesetesten ved hjelp av en testobservator U_0. Dersom det viser seg at $|U_0| < u_{0,05}$, skal vi forkaste nullhypotesen.

Dette er FEIL - ulikheten går feil vei.

D. La oss si at vi ønsker å avgjøre hypotesetesten ved hjelp av en testobservator U_0. Dersom det viser seg at $|U_0| > u_{0,025}$, skal vi forkaste nullhypotesen.

Dette er FEIL for en ensidig test- vi skal sammenlikne U_0 med kvantilen u_α, ikke $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (som er sammenlikningsgrunnlaget for en tosidig test).

E. Vi bestemmer kritisk verdi k for hypotesetesten ved å finne en k som oppfyller $P\left(\bar{X} > k|\mu_0\right) = \alpha$.

Dette er RIKTIG - den kritiske verdien er slik at sannsynligheten for å få et gjennomsnitt i stikkprøven som er "minst like ekstremt" som den kritiske verdien, skal være lik signifkansnivået α. Her er hypotesetesten hvorvidt $\mu > \mu_0$, slik at ulikheten er $\bar{X} > k|\mu_0$ (er gjennomsnittet "stort nok", sammenliknet med kritisk verdi).

F. Vi bestemmer kritisk verdi k for hypotesetesten ved å finne en k som oppfyller $P\left(\bar{X} < k|\mu_0\right) = \alpha$.

Dette er FEIL - ulikheten går feil vei.

G. Dersom styrkefunksjonen $\beta(\mu) = 0,95$ for en bestemt verdi av μ, er det 95 % sannsynlighet for at μ faktisk har denne verdien.

Dette er FEIL - her dreier det seg om en feiltolkningen av begrepet styrkefunksjon, og hva styrkefunksjonen egentlig angir.

H. Dersom styrkefunksjonen $\beta(\mu) = 0,95$ for en bestemt verdi av μ, er det 95 % sannsynlighet for vi skal akseptere nullhypotesen H_0 gitt at μ har denne verdien.

Dette er FEIL - her dreier det seg om en feiltolkningen av begrepet styrkefunksjon, og hva styrkefunksjonen egentlig angir.

I. Dersom styrkefunksjonen $\beta(\mu) = 0,95$ for en bestemt verdi av μ, er det 95 % sannsynlighet for vi skal akseptere mothypotesen H_1 gitt at μ har denne verdien.

Dette er RIKTIG - dette er den riktige forståelsen av hva styrkefunksjonen angir og måler.

Oppgave 2

Vi skal gjennomføre en hypotesetest med 5 % signifikansnivå for å avgjøre hvorvidt det er for lite biff i pakken, dvs. vi setter opp hypotesetesten

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 400 \\ H_1 &: \mu < 400, \end{aligned}$$

der vi har ukjent varians/standardavvik. Vi finner hhv. snitt og empirisk standardavvik S fra stikkprøven:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= 383,7 \\ S &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{10-1}} = 9,1 \end{aligned}$$

Ettersom standardavviket σ er ukjent (dvs. vi må bruke empiriske standardavvik for stikkprøven), bruker vi følgende testobservator for å avgjøre hypotesetesten:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{383,7 - 400}{\frac{9,1}{\sqrt{10}}} \\ &= \underline{-5,66} \end{aligned}$$

Vi skal sammenlikne $|T_0|$ med 5 %-kvantilen for t-fordelingen, dvs. $t_{0,05,10-1} = t_{0,05,9}$ som vi finner i kvantiltabellen på formelarket:

$$t_{0,05,9} = \underline{1,833}$$

Ettersom $|T_0| > t_{0,05,9}$, dvs. testobservatoren er "stor nok", vil vi her **forkaste nullhypotesen**, og hevde at det **ikke stemmer at** $\mu = 400$ - det er altså **for lite biff i pakken**.

Oppgave 3

Her dreier det seg om hypotesetesting i binomisk modell (det går også an å bruke normaltilnærming). Hypotesetesten er

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = 0.08 \\ H_1 &: \quad p > 0.08 \end{aligned}$$

Metode 1: Hypotesetesting med binomisk fordeling

Vi kan beregne signifikanssannsynligheten for å få det observerte antall defekte enheter, gitt at nullhypotesen er riktig. Dersom denne blir **mindre** enn signifikansnivået (dvs. det er "usannsynlig" å få en slik stikkprøve hvis nullhypotesen er riktig), forkaster vi nullhypotesen. Hvis imidlertid signifikanssannsynligheten blir **større** enn signifikansnivået, er det "sannsynlig" å observere en slik stikkprøve - og da beholder vi nullhypotesen.

Signifikanssannsynligheten er **sannsynligheten for å få en stikkprøve som er minst like "ekstrem" som den faktisk observerte, gitt at H_0 er riktig**. Vi innfører den binomisk fordelte variabelen X, som angir antall defekte enheter i en stikkprøve på 200 varer. Vi får (vanligvis bruker vi bokstaven p om signifikanssannsynlighet, men bruker ikke den her for å unngå forvirring med den binomiske parameteren p):

$$\begin{aligned} signifikanssannsynlighet &= P\left(X \geq 21 | H_0\right) \\ &= 1 - P\left(X < 21 | H_0\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq 20 | H_0\right) \end{aligned}$$

Her bruker vi binomisk kumulativ fordeling på kalkulator ($n = 200$ og $p = 0,08$) og får

$$P\left(X \leq 20 | H_0\right) = 0,878,$$

slik at

$$\begin{aligned} signifikanssannsynlighet &= 1 - P\left(X \leq 20 | H_0\right) \\ &= 1 - 0,878 \\ &= 0,122 \\ &\approx \underline{12\,\%} \end{aligned}$$

Ettersom signifikanssannsynligheten på 12 % er større enn signifikansnivået på 5 %, kan vi **ikke** forkaste nullhypotesen.

Metode 2: Hypotesetesting med normaltilnærming og standardstimator for p

La X angi antallet defekte enheter i en stikkprøve med totalt n enheter. Standardestimatoren p for andelen defekte enheter er

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

Ettersom det var 21 defekte enheter blant totalt 200 testede, blir estimtatet

$$\hat{p} = \frac{21}{200} = \underline{0.105}$$

En kjapp sjekk på om normaltilnærming er gyldig:

$$n\hat{p}\,(1-\hat{p}) = 200 \cdot 0.105 \cdot (1 - 0.105) = \underline{18.8}$$

Ettersom $n\hat{p}\,(1-\hat{p}) > 10$, er normaltilnærming gyldig. Testobservatoren er

$$U_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},$$

som her får verdien

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{0.105 - 0.08}{\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{200}}} \\ &= \underline{1.30} \end{aligned}$$

Ettersom vi utfører en ensidig hypotesetest, skal vi sammenlikne $|U_0|$ med kvantilen $u_\alpha = u_{0.05} = 1.645$, der kravet for å forkaste H_0 er at $|U_0| > u_\alpha$. Ettersom dette ikke er tilfelle her, kan vi ikke forkaste H_0.

Stikkprøven gir **ikke** grunnlag for å hevde at andelen defekte deler har økt til mer enn $p = 0.08$.

Oppgave 4

Vi skal avgjøre hypotesetesten

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 2.000 \text{ (”riktig kalibrert)} \\ H_1 &: \quad \mu \neq 2.000 \text{ (”ikke riktig kalibrert”)} \end{aligned}$$

Ettersom vi gjør en hypotesetest med normalfordeling og kjent standardavvik, er testobservatoren

$$U_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

som her har verdien (bruker den ferdig utregnede verdien for $\bar{X}$)

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1.971 - 2.000}{\frac{0.030}{\sqrt{10}}} \\ &= \underline{-3.06} \end{aligned}$$

Fordi hypotesetesten er tosidig, sammenlikner vi $|U_0|$ med kvantilen $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{\frac{0.01}{2}} = u_{0.005} = 2.576$, der kravet for å forkaste H_0 er at $|U_0| > u_{\frac{\alpha}{2}}$. Her ser vi at kriteriet for å forkaste H_0 er oppfylt:

$$|U_0| = 3.06 > 2.576$$

Konklusjon: maskineriet er **ikke** riktig kalibrert.

Oppgave 5

Her er hypotesetesten

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 1.50 \\ H_1 &: \quad \mu < 1.50 \end{aligned}$$

Ettersom standardavviket er ukjent, bruker vi testobservatoren

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

der S er det empiriske standardavviket (den empiriske variansen S^2 er ferdig utregnet i oppgaven). Vi får at:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1.467 - 1.50}{\frac{\sqrt{0.00312}}{\sqrt{15}}} \\ &= \underline{-2.29} \end{aligned}$$

Ettersom testen er ensidig, skal vi sammenlikne $|T_0|$ med kvantilen $t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,15-1} = t_{0.05,14} = 1.761$, der kravet for å forkaste H_0 er at $|T_0| > t_{\alpha,n-1}$. Vi ser at dette her er oppfylt:

$$|T_0| = 2.29 > t_{0.05,14} = 1.761$$

Konklusjon: kaffeautomaten leverer **for lite** kaffe i begret.

Oppgave 6

a) Levetiden T til et nødbatteri er Weibullfordelt som

$$T \sim W\left(\beta = 0.5, \eta = 100\right).$$

Vi skal bestemme forventet levetid for slike batterier. Fra formelarket finner vi forventningsverdient til en Weibullfordelt variabel T som

$$E\left(T\right) = \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

der Γ er gammafunksjonen. Her får vi:

$$\begin{aligned} E\left(T\right) &= 100 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{0.5}\right) \\ &= 100\Gamma\left(3\right) \\ &= 100 \cdot 2 \text{ (finner } \Gamma\left(3\right) \text{ i tabell på formelark)} \\ &= \underline{\underline{200}} \end{aligned}$$

b) Sannsynligheten for at et slikt batteri skal vare mer enn 48 timer er

$$\begin{aligned} P\left(T > 48\right) &= 1 - P\left(T \leq 48\right) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{48}{\eta}\right)^{\beta}}\right) \text{ (bruker kumulativ ford.)} \\ &= e^{-\left(\frac{48}{\eta}\right)^{\beta}} \\ &= e^{-\left(\frac{48}{100}\right)^{0.5}} \\ &= \underline{\underline{0.500}} \end{aligned}$$

c) Vi skal bestemme antall batterier n som må installeres for at det skal være 99 % sikkert at minst 10 batterier varer lenger enn 48 timer. Hvis X angir antall batterier som varer mer enn 48 timer, er det rimelig at anta at X er binomisk fordelt som $X \sim bin\left(n, p\right) \sim \left(n, 0.500\right)$, ettersom batteriene opererer uavhengig av hverandre.

Vi skal altså bestemme n slik at

$$P\left(X \geq 10\right) = 0.99$$

Ved en omskriving kan vi benytte oss av den kumulative binomiske fordelingen på kalkis:

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 10\right) &= 1 - P\left(X \leq 9\right) = 0.99 \\ &\Rightarrow P\left(X \leq 9\right) = 1 - 0.99 = 0.01 \end{aligned}$$

Vi skal altså finne en n som er slik at

$$P(X \leq 9) = 0.01$$

Prøving og feiling på kalkis (her kalles parameteren n for $Numtrial$):

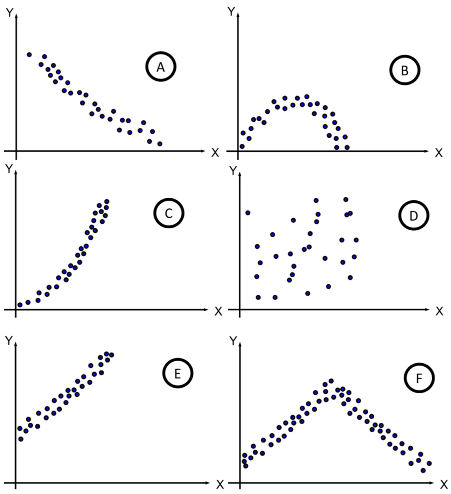
```
Binomial C.D
Data    :Variable
x       :9
Numtrial:32
p       :0.5
Save Res:None
Execute
CALC

Binomial C.D
     p=0.0100308
```

Altså: med **32** batterier, blir sannsynligheten for 48 timers kontinuerlig drift lik 99 %.

Oppgave 7

Vi skal i hver graf avgjøre hvorvidt korrelasjonskoeffisienten ρ mellom X og Y er positiv, negativ eller essensielt null.



Dersom det er slik at når X øker, øker også Y, har vi "positiv samvariasjon" og positiv korrelasjonskoeffisient. Omvendt: hvis X øker og Y avtar, er det "negativ samvariasjon" og negativ korrelasjonskoeffisient. Hvis det ikke er noe systematisk samvariasjon mellom X og Y , blir korrelasjonkoeffisienten liten ("essensielt null").

A: Y avtar med økende X,altså **negativ korrelasjonskoeffisient,** $\rho < 0$

B: Y både øker og avtar med økende X og økningen er like stor som minkingen (symmetri)- dvs. essensielt **null korrelasjonskoeffisient,** $\rho \approx 0$

C: Y øker med økende X, altså **positiv korrelasjonskoeffisient,** $\rho > 0$

D: Ingen systematisk samvariasjon - **null korrelasjonskoeffisient,** $\rho \approx 0$

E: Y øker med økende X, altså **positiv korrelasjonskoeffisient,** $\rho > 0$

F: Y både øker og avtar med økende X og økningen er like stor som minkingen (symmetri)- dvs. essensielt null korrelasjonskoeffisient, $\rho \approx 0$