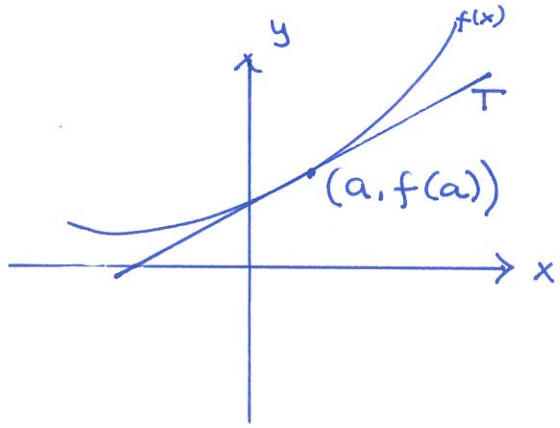
3.1 Derivasjon og endringsrater

Definisjon : Den deriverte av en funksjon f er funksjonen f', definert ved

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

for alle x der grensen eksisterer.

"Slope predictor"



Den deriverte til f i punktet $(a, f(a))$ gir oss stigningstallet til T i det punktet.

$$y - y(a) = f'(a)(x-a)$$

Eksempel

Bruk definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x+h) = (x+h)^n$$

(Binomial-formelen)
$$= x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + \binom{\ }{\ } x^{n-2} h^2 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{\ }{\ } x^2 h^{n-2} + n x h^{n-1} + h^n$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1} h + \binom{\ }{\ } x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{\ }{\ } x^2 h^{n-2} + n x h^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n x^{n-1} + \binom{\ }{\ } x^{n-2} h + \ldots + \binom{\ }{\ } x^2 h^{n-3} + n x h^{n-2} + h^{n-1} \right)$$

$$\underline{\underline{n x^{n-1}}}$$

(Bokas notasjon : $D_x x^n = n x^{n-1}$).

Notasjon : $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Endringsrater

La oss si at vi har en størrelse Q som varierer med tiden.

Endringen i Q fra t til Δt er :

$$\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$$

Gjennomsnittsendringen :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Instantanendring :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

$$= Q'(t) = \frac{dQ}{dt} .$$

(leses: "endringen i Q pr. tidsenhet t).

$$\frac{dQ}{dt} > 0 \quad : Q \text{ øker}$$

$$\frac{dQ}{dt} < 0 \quad : Q \text{ avtar}$$

Fart og aksellerasjon

Anta at en partikkel beveger seg langs en horisontal rett linje, gitt ved $x = f(t)$. Ser på intervallet fra t til $t + \Delta t$:

$$\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$$

Gjennomsnittsfarten $\left(f = \frac{s}{t} \right)$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Instantanfarten

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\Delta t + t) - f(t)}{\Delta t}$$

Altså: $v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$.

Aksellereasjon : - endringen (altså; den deriverte) av farten : $a = \frac{dv}{dt}$.

<u>Oppgave 3.1.52</u>

Populasjonen, gitt i tusen, i byen Metropolis er gitt ved

$$P(t) = 100\left[1 + 0{,}04t + 0{,}003t^2\right],$$

med t i år og t=0 tilsvarende 1980.

a) Hva er endringsraten til P i 1986?

b) Hva er den gjennomsnittlige endringen av P fra 1983 til 1988?

a) $P'(t) = 100\left[0{,}04 + 0{,}006t\right]$

$P'(6) = 100\left(0{,}04 + 0{,}006 \cdot 6\right) = 7{,}6$

b) $P(8) = 151{,}2$

$P(3) = 114{,}7$

$$\frac{P(8)-P(3)}{5} = \frac{151,2-114,7}{5} = 7,3$$

3.2. Derivasjonsregler

Alle derivasjonsregler vi kjenner er utledet av definisjonen $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

TEOREM 1: Den deriverte av en konstant er null

$(f(x) \equiv c \quad \forall x \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x)$.

Notasjon: $\frac{dc}{dx} = D_x c = 0$.

TEOREM 2: ... , $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.

TEOREM 3

Anta f og g deriverbare funksjoner, samt a og b to konstanter (reelle tall). Da er

$$D_x\left[af(x)+bg(x)\right] = a\left[D_x f(x)\right] + b\left[D_x g(x)\right].$$

Med $u=f(x)$ og $v=g(x)$, får uttrykket formen

$$\frac{d(au+bv)}{dx} = a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx}.$$

Bevis

For å vise en derivasjonsregel bruker vi definisjonen:

$$D_x\left[af(x)+bg(x)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\left[af(x+h)+bg(x+h)\right]-\left[af(x)+bg(x)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[af(x+h)-af(x)\right]+\left[bg(x+h)-bg(x)\right]}{h}$$

$$= a\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + b\left[\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= a\left[D_x f(x)\right] + b\left[D_x\, g(x)\right] . \qquad \square$$

Oppgave 3.2.6

Deriver funksjonen $g(t) = (4t-7)^2$

$$g(t) = (4t-7)^2 = 16t^2 - 56t + 49$$

$$\underline{\underline{g'(t) = 32t - 56 .}}$$

TEOREM 4

Antа at f og g er deriverbare i x. Da er $f \cdot g$ deriverbar i x, og

$$D_x\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) .$$

Når man har en uavhengig variabel man "vet om":

$$(uv)' = u'v + uv' .$$

Oppgave 3.2.14

Deriver $f(x) = (2x^3 - 3)(17x^4 - 6x + 2)$.

$$f'(x) = (6x)(17x^4 - 6x + 2) + (2x^3 - 3)(68x^3 - 6)$$

(faktoriser...)

Andre måter å finne $f'(x)$?

TEOREM

Anta f deriverbar i x og $f(x) \neq 0$.

Da er

$$D_x\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

TEOREM 6

Anta at f og g er deriverbare i x, og $g(x) \neq 0$. Da er $\frac{f}{g}$ deriverbar, og

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Bevis

Vi skal bruke produktregelen, og skriver derfor: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[D_x f(x)\right] \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[D_x \frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \square$$