

Oppgave 63

Gitt $f(x) = x^n e^{-x}$, der n er et positivt heltall større enn 1. Da er

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Dette betyr at den positive x-akse er en horisontal asymptote. Videre er

$$f'(x) = \frac{(n-x)x^{n-1}}{e^x}$$

og

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 2nx + n^2 - n)x^{n-2}}{e^x}.$$

Derfor er den deriverte null i to punkt, $(0, 0)$ og $(n, n^n e^{-n})$. Vi ser kun på grafen for $x > 0$, og denne øker for $0 < x < n$, og avtar for $x > n$. Vi har et maksimum for $x = n$. Videre er den dobbeltderiverte null for $x = a = n - \sqrt{n}$ og $x = b = n + \sqrt{n}$. Det er lett å vise at den dobbeltderiverte er større enn null for $0 < x < a$ og $x > b$, og er negativ i området $a < x < b$ (se at funksjonen $g(x) = x^2 - 2nx + n^2 - n$ er en parabel med åpning oppover). Derfor har funksjonen to vendepunkt for $x > 0$.