

Oppgave 73

Fra oppgave 63, har vi følgende resultat;

- $f'(x) = \frac{(n-x)x^{n-1}}{e^x}$
- $f(0) = 0$
- $f(x) \geq 0$, $x \geq 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.
- Kritisk punkt for $x = n$, som gir et maksimumspunkt $(n, n^n e^{-n})$.

Da har vi at $f(n-1) = (n-1)^n e^{-(n-1)} < n^n e^{-n}$, slik at

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{e^{n-1}}{e^n} = \frac{1}{e}.$$

Derfor blir

$$e < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

For $f(n+1) = (n+1)^n e^{-(n+1)} < n^n e^{-n}$ får vi

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Bruker man en datamaskin eller en kalkulator, får man for $n = 10^6$

$$2.7182804690 < e < 2.71828331877,$$

noe som gir $e = 2.71828$ med 5 desimaler.