Oppgave 47
Skriver $x = b$ for å minne om at problemet kun har en variabel. Merk at $0 < x < a$. Arealet blir da

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\pi a x \left[\frac{x}{a} + \frac{a}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \arcsin \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \right] \\ &= 2\pi x^2 + 2\pi a^2 \frac{x \arcsin \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Har da at

$$\lim_{x \to a^-} A(x) = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 \left(\lim_{x \to a^-} \frac{x}{a} \frac{\arcsin \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}}{\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}} \right)$$

Substituerer $u = \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$, og vi ser at $u \to 0^+$ når $x \to a^-$. Da har vi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a^-} A(x) &= 2\pi a^2 + 2\pi a^2 \left(\lim_{x \to a^-} \frac{x}{a} \right) \left(\lim_{u \to 0^+} \frac{\arcsin u}{u} \right) \\ &\overset{\text{l'H}}{=} 2\pi a^2 + 2\pi a^2 \left(\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$