Oppgave 56

Et lite segment ved posisjon y med lengde dy, har masse δdy, og dermed er kraften på m gitt ved $\frac{Gm\delta}{y^2+a^2}dy$. Alle vertikale komponenter kansellerer hverandre, og den totale kraft på staven fra m i horisontal retning finnes ved å integrere opp de små kraftbitene $\frac{Gm\delta\cos\theta}{y^2+a^2}dy$;

$$
\begin{aligned}
F &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Gm\delta\cos\theta}{y^2+a^2}\,dx \\
&= Gm\delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx \\
&= 2Gm\delta a \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx
\end{aligned}
$$

Bruker man trigonometrisk substitusjon eller formel 52 bakerst i boka, får man

$$
\begin{aligned}
F &= 2Gm\delta a \left[\frac{y}{a^2\sqrt{a^2+y^2}}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{2Gm\delta}{a} \lim_{y\to\infty} \frac{y}{a^2\sqrt{a^2+y^2}} \\
&= \frac{2Gm\delta}{a} \lim_{y\to\infty} \frac{y}{1\sqrt{1+\left(\frac{a}{y}\right)^2}} \\
&= \frac{2Gm\delta}{a}.
\end{aligned}
$$