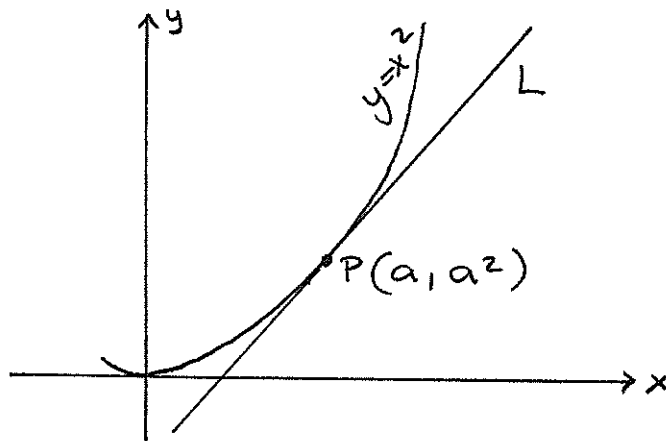


2.1. Tangenter og stigningstall

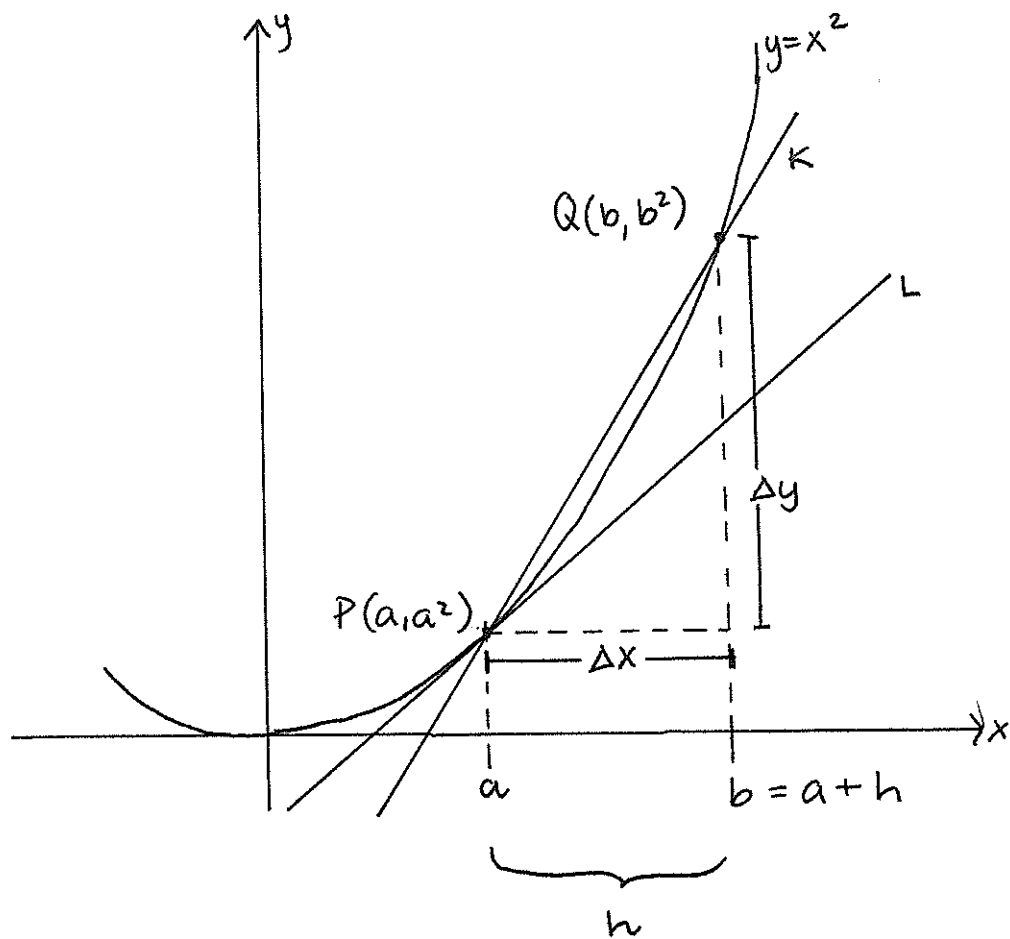
Eksempel 1

Bestem stigningstallet til tangentlinja L for parabolen $y = x^2$ i punktet $P(a, a^2)$.



Kan ikke finne stigningstallet direkte siden vi kun har ett punkt.

Vi tar derfor utgangspunkt i en annen linje vi kan regne med, sekantlinjen K .



$$h = \Delta x = b - a$$

(Δx betegner en endring i x -retning, standard terminologi i kalkulus).

$$\Delta y = b^2 - a^2 = (a+h)^2 - a^2$$

Stigningstallet for linja K : (afh. av h !)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$= \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \quad (\text{siden } h \neq 0).$$

Når h nærmer seg null, vil K nærme seg linja h . Altså;

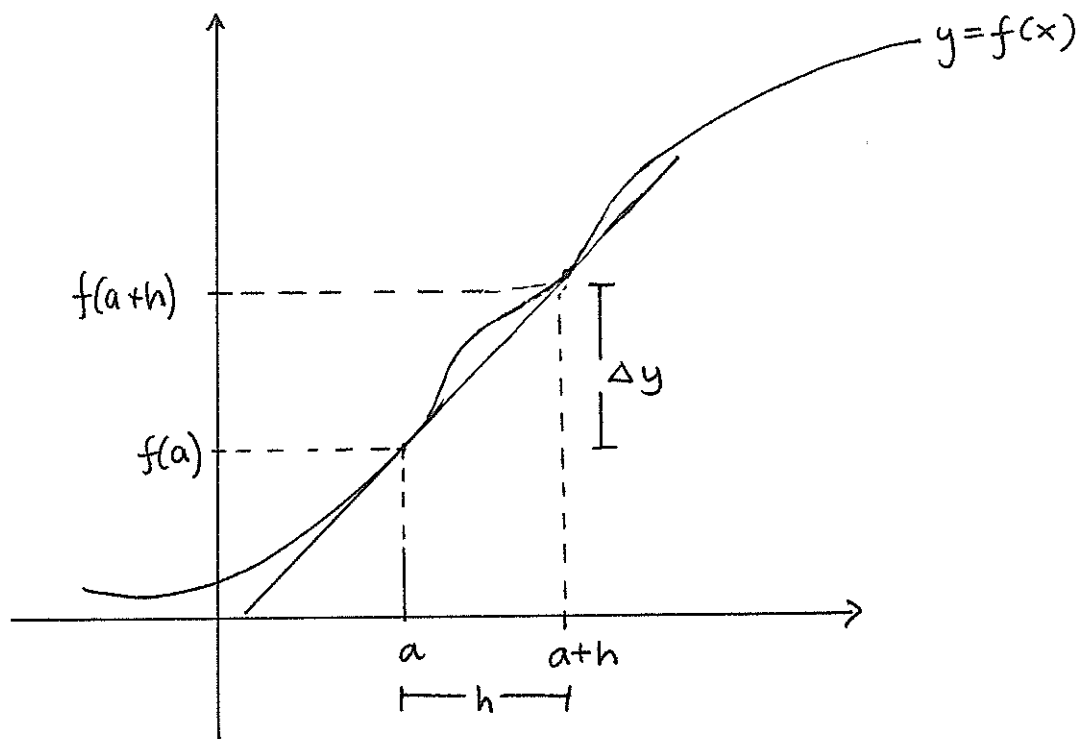
$$\lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = ?$$

Numeriske undersøkelser viser at for $a=1$, vil $\lim_{h \rightarrow 0} (2 \cdot 1 + h) = 2$.

Generelt ;

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a.$$

Stigningstallet for h er altså $2a$.
 Δ



Stigningstall : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(Kommer tilbake når vi starter med derivasjon).

TEOREM (Parabler og tangenter).

Parablen $y = f(x) = px^2 + qx + r$ ($p \neq 0$)
med tangent i $P(a, f(a))$.

Tangentens stigningstall er

$$m(a) = 2pa + q.$$

Bevis

Tangenten er definert som

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \text{ når } h \rightarrow 0.$$

Med $f(x) = px^2 + qx + r$ vil vi få:

$$f(a+h) = p(a+h)^2 + q(a+h) + r$$

$$\text{og } f(a) = pa^2 + qa + r.$$

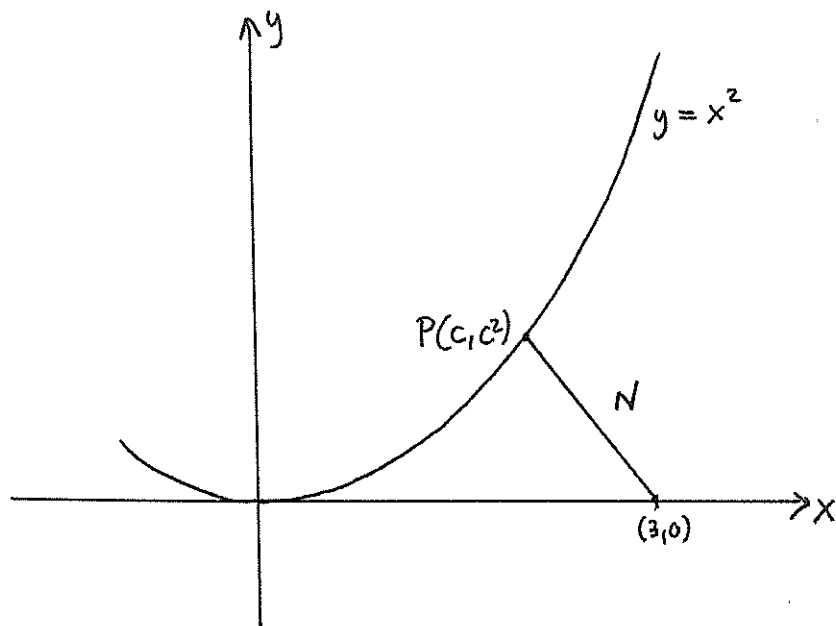
Da kan vi starte utregningen:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{[p(a+h)^2 + q(a+h) + r] - [pa^2 + qa + r]}{h} \\
&= \frac{pa^2 + 2pah + ph^2 + qa + qh + r - pa^2 - qa - r}{h} \\
&= \frac{2pah + ph^2 + qh}{h} \\
&= 2pa + ph + q .
\end{aligned}$$

Når $h \rightarrow 0$, nærmer uttrykket seg $2pa + q$.
□

Normalen

Problem : Finn punktet $P(c, c^2)$ som ligger på parablen $y = x^2$ og som er nærmest punktet $(3, 0)$.



Vi ser intuitivt at linjesegmentet N bør være ortogonal (eller stå normalt på) tangenten til punktet $P(c, c^2)$.

Dersom stigningstallet til tangentlinja er m , vil stigningstallet til N være $-\frac{1}{m}$

(app. B, teorem 2).

P.S : To ortogonale linjer med stigningstall m_1 og m_2 har egenskapen $m_1 m_2 = -1$.