Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1, 7. desember 2005

Løsning

Oppgave 1 Siden $\cosh 0 = 1$ og den deriverte til $\cosh x$ er $\sinh x$, får vi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x} = \sinh 0 = 0.$$

Alternativt kan man observere at man har å gjøre med et 0/0-uttrykk og så f. eks. bruke l'Hôpitals regel. Funksjonen f er kontinuerlig i 0 fordi $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$.

Oppgave 2

a) Vi setter $f(x) = \cosh x - 1 - x$. Vi har $f(1) = \cosh 1 - 2 = (e + 1/e)/2 - 2 < (3 + 1/2)/2 - 2 = -1/4$ (evt. $f(1) = -0.46$ med to desimaler ved bruk av kalkulator) og $f(2) = \cosh 2 - 3 = (e^2 + 1/e^2)/2 - 3 > 7/2 - 3 = 1/2$ (evt. $f(2) = 0.76$ med to desimaler ved bruk av kalkulator). Siden f er kontinuerlig på $[1, 2]$, gir skjæringssetningen at $f(x) = 0$ for minst en x i $(1, 2)$. På den annen side har vi $f'(x) = \sinh x - 1 > \sinh 1 - 1 > 0$ for alle x i $(1, 2)$. Derfor er f strengt voksende på $[1, 2]$, hvilket betyr at vi kan ha høyst en løsning av $f(x) = 0$ i $(1, 2)$.

b) Newtons metode gir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n \sinh x_n - \cosh x_n + 1}{\sinh x_n - 1}.$$

Vi starter iterasjonen med $x_0 = 1.5$ som gir $x_1 = 1.63069...$, $x_2 = 1.61632...$, $x_3 = 1.61613...$. Vi konkluderer at løsningen med to desimaler er $x^* = 1.62$.

Oppgave 3 Denne oppgaven gjøres enklest ved bruk av Pappus' teorem. Arealet av kvadratet er 2, og dets tyngdepunkt (sentroide) er $(2, 0)$. Dermed blir volumet $V = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$. Alternativt kan man f. eks. bruke skivemetoden, som ved symmetri gir

$$V = 2 \int_0^1 \pi \ \left[(3 - y)^2 - (y + 1)^2\right] dy = \frac{2\pi}{3} \left[-(3 - y)^3 - (y + 1)^3\right]_0^1 = 8\pi.$$

Oppgave 4 Vi har fra formelsamling eller ved utregning via substitusjonen $u = \cos x$ at

$$\int \tan x \; dx = -\ln \cos x + C.$$

(Merk at $\cos x > 0$ siden $-\pi/2 < x < \pi/2$.) Integrerende faktor er derfor $1/\cos x$ slik at ligningen kan omformes til

$$\frac{d}{dx}\left(y/\cos x\right) = \tan^2 x.$$

Her kan vi igjen ty til formelsamling eller huske at den deriverte til $\tan x$ er $\tan^2 x + 1$, slik at vi får

$$y = (\tan x - x + C)\cos x.$$

Initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir $C = 1$ og dermed

$$y = \sin x + \cos x - x\cos x.$$

Oppgave 5

a) I løpet av et kort tidsrom $[t, t + \Delta t]$ får vi endringen

$$\Delta x \approx \big(k - (x/10^5) \cdot 1000\big)\,\Delta t.$$

Vi deler på Δt og lar Δt gå mot 0. Det leder til den separable og lineære ligningen

$$x' = k - x/100, \qquad 0 \le t \le 72.$$

Om vi løser den som en separabel ligning, får vi

$$\int \frac{dx}{x - 100k} = -\int \frac{dt}{100},$$

altså

$$x = 100k - Ce^{-t/100}.$$

Initialbetingelsen $x(0) = 0$ gir $C = 100k$, og dermed

$$x = 100k\left(1 - e^{-t/100}\right).$$

b) $x(t)$ vil nå sitt maksimum når $t = 72$. Vi må altså ha $x(72) = 0.015 \cdot 10^5 = 1500$. Det gir

$$k = \frac{15}{1 - e^{-72/100}} = 29.2 \quad \text{(kg/time)},$$

avrundet med en desimal.

Oppgave 6 Vi begynner med å delbrøkoppspalte integranden:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Setter vi på felles brøkstrek, får vi ligningssystemet $A+B+C=0$, $5A+4B+3C=0$, $6A+3B+2C=1$, som har løsning $A=1/2$, $B=-1$, $C=1/2$. (Et alternativ til å løse ligningssystemet er å gange med de respektive faktorene $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ og så lese av A, B, C ved innsetting av de respektive punktene -1, -2, -3.) Dermed får vi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^R = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

siden

$$\lim_{R\to\infty} \ln\frac{(R+1)^{1/2}(R+3)^{1/2}}{R+2} = \lim_{R\to\infty}\ln\frac{(1+1/R)^{1/2}(1+3/R)^{1/2}}{1+2/R} = \ln 1 = 0.$$

Oppgave 7

a) Fra rekken for $\cos x$ får vi

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k+2)!}.$$

Det må kunne antas kjent at Maclaurin-rekken til $\cos x$ konvergerer for alle reelle x, slik at vår rekke også konvergerer for alle x. Alternativt kan vi bruke forholdstest: Med $c_k = (-1)^{k+1}x^{2k}/(2k+2)!$ får vi

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{x^2}{(2k+3)(2k+4)} = 0$$

for alle x.

b) Ved resultatet i a) får vi følgende rekkerepresentasjon for integralet:

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)(2k+2)!}.$$

Vi observerer at dette er en alternerende rekke der leddene avtar i absoluttverdi og dessuten går mot 0. Vi kan derfor bruke feilestimat for alternerende rekke. Siden $(2\cdot 3+1)(2\cdot 3+2)! = 282240 > 10000$, klarer vi oss med tre ledd:

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{72} - \frac{1}{3600} = -\frac{1751}{3600} = -0.4864,$$

avrundet med fire desimaler.