**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 995 59 273

# EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Fredag 18. august 2006
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 11. september

*Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

**Oppgave 1** Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}.$$

**Oppgave 2**

**a)** Finn summen av rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}.$$

**b)** Finn konvergensradien for potensrekken

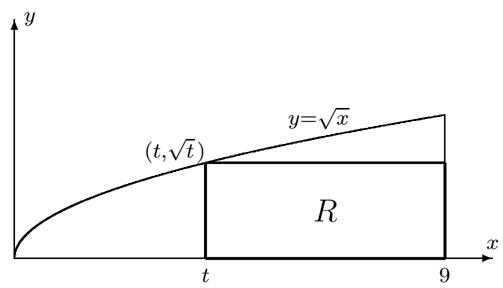
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\arctan n}$$

og avgjør om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

**Oppgave 3** Løs initialverdiproblemet

$$\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} = x(2y-3), \qquad y(0)=1.$$

**Oppgave 4** Et rektangel $R$ (se figuren) der sidene er parallelle med koordinataksene, har øverste venstre hjørne i punktet $(t, \sqrt{t}\,)$ på kurven $y=\sqrt{x}$ og nederste høyre hjørne i punktet $(9,0)$ på $x$-aksen.




**a)** Finn arealet av $R$ uttrykt ved $t$. Bestem den største verdien som arealet oppnår når $t$ varierer fra 0 til 9.

**b)** For hvilken verdi av $t$ blir arealet av $R$ like stort som arealet av et kvadrat med side $t$? Bruk Newtons metode til å løse ligningen du får, og angi svaret med to desimaler.

**Oppgave 5** Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx} = x + y^2, \qquad y(0)=1.$$

**a)** Bruk Eulers metode med skrittlengde $h=0.1$ til å finne en tilnærmet verdi for $y(0.3)$.

**b)** La $P_2(x)$ betegne Taylorpolynomet av grad 2 om $x=0$ for løsningen $y(x)$ av initialverdiproblemet $(*)$. Beregn $P_2(0.3)$.

Hint: Deriver $(*)$ implisitt for å finne $y''$.

**Oppgave 6** La $R$ betegne området i $xy$-planet begrenset av $x$-aksen og kurven $y=3x-x^2$. Finn volumet av rotasjonslegemet som fremkommer når $R$ dreies om linjen $x=-1$.

**Oppgave 7** La $f(x)$ være en ikkenegativ funksjon som er deriverbar med kontinuerlig derivert for $x \geq 1$. Buelengden til kurven $y=f(x)$ fra $x=1$ til $x=u$ er gitt ved en funksjon $H(u)$. Bestem funksjonen $f$ dersom

$$H(u) = \frac{u^3}{3} + u - \frac{4}{3} \quad \text{og} \quad f(1)=0.$$