TMA4100 Matematikk 1 eksamen 18.08.06

Løsningsforslag

1 Grenseverdien er ubestemt av formen "0/0". To gangers bruk av L'Hôpitals regel gir

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hôp.}}}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-2\sin 2x} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hôp.}}}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{-4\cos 2x} = \frac{1}{4}.$$

2 **a)** Den gitte rekken er en sum av to geometriske rekker. Ved å bruke summeformelen $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a/(1-r)$ for geometriske rekker med $|r|<1$, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-2/3} + \frac{5}{1-1/3} = 3 + \frac{15}{2} = \frac{21}{2}.$$

b) Ved forholdstesten er konvergensradien R gitt ved

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n} = \frac{\pi/2}{\pi/2} = 1.$$

For $x=\pm 1$ får vi rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\arctan n} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\arctan n}.$$

Begge rekkene divergerer ifølge n-teleddstesten for divergens siden $\lim_{n\to\infty}\arctan n = \pi/2$.

3 Den gitte differensialligningen er separabel, og kan (for $2y-3\neq 0$) skrives

$$\frac{2}{2y-3}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Ved integrasjon får vi $\ln|2y-3| = \ln(x^2+1)+C$. Det gir

$$2y-3 = C_1(x^2+1)$$

der $C_1 = \pm e^C$. Innsetting av initialbetingelsen $y(0)=1$ gir $C_1=-1$. Løsningen blir altså

$$2y-3 = -(x^2+1) \qquad \text{dvs.} \qquad y = 1-\frac{x^2}{2}.$$

4 **a)** Arealet A av rektangelet R er grunnlinjen ganget med høyden:

$$A = (9-t)\sqrt{t} = 9t^{1/2} - t^{3/2}, \qquad 0\le t\le 9.$$

For $t=0$ og for $t=9$ er $A=0$. Maksimumsverdien oppnås derfor i et punkt i det åpne intervallet $(0,9)$ der $dA/dt=0$. Derivasjon gir

$$\frac{dA}{dt} = \frac{9}{2}t^{-1/2} - \frac{3}{2}t^{1/2} = \frac{9}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{2}\sqrt{t} = \frac{9-3t}{2\sqrt{t}}.$$

Følgelig får arealet sin største verdi når $t=3$ (eneste mulighet), og $A_{\max} = 6\sqrt{3}$.

b) Et kvadrat med side t har areal t^2. Vi må følgelig løse ligningen $(9-t)\sqrt{t} = t^2$ med hensyn på t. Etter forkorting med $\sqrt{t}$ kan ligningen skrives

$$t^{3/2} + t - 9 = 0.$$

Vi innfører $f(t) = t^{3/2} + t - 9$ og bruker Newtons metode:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{t_n^{3/2} + t_n - 9}{\frac{3}{2}t_n^{1/2} + 1} = \frac{t_n^{3/2} + 18}{3t_n^{1/2} + 2}.$$

Vi kan starte med $t_0 = 4.5$ (midt i intervallet). Avrundet til fire desimaler får vi

$$t_1 = 3.2934, \qquad t_2 = 3.2208, \qquad t_3 = 3.2205.$$

Svaret er følgelig $t = 3.22$.

5 **a)** Differensialligningen er $y' = x + y^2$. Ifølge Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$ er $y(x_n) \approx y_n$ der x_n og y_n er definert rekursivt ved

$$x_{n+1} = x_n + 0.1, \qquad y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n + y_n^2), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Fra initialbetingelsen $y(0) = 1$ får vi $x_0 = 0$ og $y_0 = 1$. Da blir

$$x_1 = 0.1,\ y_1 = 1.1, \qquad x_2 = 0.2,\ y_2 = 1.231, \qquad x_3 = 0.3,\ y_3 = 1.402361.$$

Følgelig er $y(0.3) \approx y_3 = 1.402$ (avrundet til tre desimaler).

b) Vi har gitt $y(0) = 1$, og av differensialligningen følger $y'(0) = 1$. Deriverer vi differensialligningen med hensyn på x, får vi

$$y''(x) = 1 + 2y(x)y'(x).$$

Det gir $y''(0) = 3$. Taylorpolynomet $P_2(x)$ til $y(x)$ om $x = 0$ er altså

$$P_2(x) = 1 + x + \tfrac{3}{2}x^2.$$

Følgelig er $P_2(0.3) = 1.435$.

6 Kurven $y = 3x - x^2$ skjærer x-aksen i 0 og 3. Ved å bruke sylinderskallmetoden får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_*^{**} 2\pi r\, dA = 2\pi \int_0^3 (x+1)(3x - x^2)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\, dx = 2\pi \Big[\tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^3 = \tfrac{45}{2}\pi. \end{aligned}$$

7 Vi kan uttrykke buelengden til kurven $y = f(x)$ som et integral, og har da gitt at

$$\int_1^u \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \tfrac{1}{3}u^3 + u - \tfrac{4}{3} \qquad \text{(for } u \geq 1\text{)}.$$

Ved derivasjon med hensyn på u får vi

$$\sqrt{1 + [f'(u)]^2} = u^2 + 1.$$

Det gir

$$\big[f'(u)\big]^2 = u^4 + 2u^2 \qquad \text{dvs.} \qquad f'(u) = \pm u\sqrt{u^2 + 2}.$$

Her må vi velge fortegnet $+$ siden f skal være ikkenegativ. Ved integrasjon får vi

$$f(u) = \tfrac{1}{3}(u^2 + 2)^{3/2} + C.$$

Betingelsen $f(1) = 0$ gir $C = -\sqrt{3}$. Med x som fri variabel blir dermed svaret

$$f(x) = \tfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2} - \sqrt{3}.$$