En kort oppsummering av kurvedrøfting

Stoffet presentert her finner dere i kapittel 4.5-4.7 i Edwards & Penney (Adams 4.3-4.4). Stoffet er selvstudium fordi det er rein repetisjon av ting lært i 2MX og 3MX.
I en typisk funksjonsdrøftingsoppgave får vi oppgitt en funksjon $f(x)$ med definisjonsområde D_f, og vi skal svare på forskjellige spørsmål av typen under. Til slutt skal vi gjerne skissere grafen til f på grunnlag av det vi har funnet.

Finne nullpunkt.

Vi løser ligningen $f(x) = 0$ mhp. x. Pass på at løsningen(e) er innenfor D_f. Av og til blir vi bare spurt om å vise eksistensen av et nullpunkt, uten at vi behøver å finne det. Da er skjæringssetningen et lurt hjelpemiddel. Den sier nemlig at hvis $f(x)$ er kontinuerlig og $f(a) > 0$ mens $f(b) < 0$, så har f et nullpunkt mellom a og b.

Finne lokale ekstremalpunkter.

Her løser vi først $f'(x) = 0$ mhp. x. Deretter tegner vi et fortegnsskjema for $f'(x)$, f.eks. ved å sjekke fortegnet til $f'(x)$ for noen passende x-verdier. I de punktene hvor $f'(x)$ skifter fortegn har vi lokale maks/min. Vær oppmerksom på at eventuelle punkt der $f'(x)$ ikke fins (men $f(x)$ fins) også kan gi fortegnsskifte. Et typisk eksempel på slike punkt er knekkpunkt. Til slutt må vi sjekke eventuelle endepunkt som er med i D_f. De blir nesten alltid lokale maks/min.
I denne sammenheng kan også 2.deriverte testen nevnes. Den sier at dersom f er to ganger deriverbar på et intervall om et kritisk punkt c (dvs. et punkt med $f'(c) = 0$), så er $f(c)$ et lokalt minimum hvis $f''(c) > 0$ og lokalt maksimum hvis $f''(c) < 0$.

Finne globale ekstremalpunkter.

Dersom $f(x)$ har globale maks/min, så finner vi dem blant de lokale ekstremalpunktene fra forrige punkt. Bare plukk dem som gir størst/minst funksjonsverdi.
Hvordan kan vi vite at globale ekstremalpunkt fins? Ett viktig hjelpemiddel er ekstremverdisetningen. Den sier at dersom f er kontinuerlig på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$, så har f minst ett globalt maksimum og minst ett globalt minimum i $[a, b]$.
Ellers: Hvis D_f er uendelig noen vei, må vi sjekke $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ for å få oversikt. Hvis f.eks $f(x)$ går mot $+\infty$ (eller $-\infty$) noe sted, har selvsagt ikke f noe globalt maksimum (eller minimum).

Hvor vokser og avtar f?

Vi bruker fortegnsskjema til $f'(x)$ for å bestemme hvor f vokser og avtar (også kalt å bestemme monotoniegenskapene til f).
Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$, så er f strengt voksende på $[a, b]$. Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$, så er f strengt avtagende på $[a, b]$.

Bestemme vendepunkt(=inflection point) og krumning.

Her må vi drøfte $f''(x)$. Vi begynner ved å løse $f''(x) = 0$. Deretter tegner vi fortegnsskjema for den dobbelderiverte. Vendepunkt har vi hvor $f''(x) = 0$ eller $f''(x)$ ikke eksisterer (men $f(x)$ må eksistere). I tillegg må $f''(x)$ virkelig skifte fortegn i punktene. Grafen krummer opp (den smiler) der $f''(x) > 0$ og den krummer ned (den er sur) der $f''(x) < 0$.

Finne horisontale asymptoter.

Hvis $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ eller $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ (eller begge deler), så er linjen $y = a$ en horisontal asymptote. Dette gir kun mening å sjekke dersom D_f er uendelig i minst en retning.

Finne vertikale asymptoter.

Linjen $x = a$ er en vertikal asymptote for f hvis $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ eller $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, eller begge deler.

Finne skrå asymptoter (=slant asymptote eller =oblique asymptote (Adams)).

Ikke alle asymptoter er horisontale eller vertikale. Noen er såkalte skrå asymtoter. Vi har at linjen $y = ax + b$ er en skrå asymptote for f dersom

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0,$$

eller begge deler. Typisk tilfelle er dersom f er en rasjonal funksjon (dvs polynom i teller og nevner). Da har vi at f har skrå asymtote hvis og bare hvis polynomet i telleren er av nøyaktig én grad høyere en polynomet i nevneren. Polynomdivisjon gir da $f(x) = ax + b + g(x)$, der $a \neq 0$ og $g(x)$ er en rasjonal funksjon med $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

Skissere grafen.

Vi kan nå skissere grafen til f på grunnlag av det vi har funnet over. Vi vet jo endel funksjonsverdier (punkt der $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ $f''(x) = 0$ og eventuelle punkt hvor f' eller f'' ikke eksisterer.) Dessuten vet vi utifra de forskjellige fortegnsskjemaene hvordan f oppfører seg mellom disse funksjonsverdiene. Til slutt vet vi om f har asymptoter. Disse opplysningene er nok til å lage en fin skisse av grafen til f.