1. Delvis integrasjon

Formel: $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$

(utledes av produktregelen for derivasjon).

Eksempel

$\int e^x \sin x\,dx$

Delvis integrasjon med $u=e^x$ og $v'=\sin x$ gir:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

En gang til: $u=e^x$ og $v'=\cos x$

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + \left[e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx\right]$$
$$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

Flytter vi integralet på høyre side over på venstre side, får vi

$$2\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

Altså ;

$$\int e^x \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$$

Δ

2. Substitusjon

Formel : $\int f[g(x)]\, g'(x)\,dx = F[g(x)] + C$.

Eksempel

Beregn $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Vi prøver $u = \sqrt{x} + 1$. Alle x må byttes ut med u.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff 2\sqrt{x}\,du = dx .$$

Men : her er x på begge sider (ville gitt oss integralet $\int \frac{1}{u} 2\sqrt{x}\,du$).

Vi prøver på nytt :

$$u = \sqrt{x} + 1 \iff \sqrt{x} = u - 1 \iff x = (u-1)^2$$

Dette gir $\frac{dx}{du} = 2(u-1)$, eller

$$dx = 2(u-1)\,du$$

Da blir $\quad I = \int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,2(u-1)\,du$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$$

$$= 2\left[u - \ln|u|\right] + C$$

$$= \underline{\underline{2\left[(\sqrt{x}+1) - \ln(\sqrt{x}+1)\right] + C}} \, .$$

Δ

(Denne teknikken er et fint utgangspunkt for oppgave 10).

3. Delbrøkoppspalting

Brukes på uttrykk av formen $\frac{P(x)}{Q(x)}$,

der P og Q er polynomer.

NB! Graden til nevneren må være større enn graden til telleren. Må også faktorisere nevneren fullstendig.

Eksempel 3.1

Bestem delbrøkoppspaltningen til:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)(x+2)^3(x^2+2x+5)^2}.$$

Multiplisiteten bestemmer antall ledd.
"Indre grad" bestemmer formen på telleren.

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x-1)(x+2)^3(x^2+2x+5)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B_1}{(x+2)} + \frac{B_2}{(x+2)^2}$$

$$+ \frac{B_3}{(x+2)^3} + \frac{C_1 x + C_2}{(x^2+2x+5)}$$

$$+ \frac{D_1 x + D_2}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Hvorfor gjør vi dette?

La oss se på et litt enklere eksempel.

Eksempel 3.2

Beregn $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$.

Vi starter med delbrøkoppspalting :

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \qquad (*)$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

Dersom likheten skal gjelde, må koeffisientene i telleren sammenlignes. Dette gir :

$$A+B=0$$
$$2A-2B=1$$

Løser vi ligningssystemet, får vi $A=1/4$ og $B=-1/4$. Setter vi inn i $(*)$ får vi da :

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1/4}{x-2} + \frac{-1/4}{x+2} \qquad (♥)$$

Siden oppgaven vår var å beregne integralet av venstresiden, kan vi med (♥) istedet regne ut integralet av høyresiden (som er mye enklere!).

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C}}.$$

$\triangle$

<u>Konklusjon</u>: Delbrokoppspalting gir oss "mindre" uttrykk som er enklere å integrere!

Supereksempel

Beregn $\quad I = \int \frac{2x^4+6x^3+4x^2-6x+4}{(x-1)(x^2+4x+5)}\,dx$

1. Graden til telleren er 4, graden til nevneren er 3. Da starter vi med polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
(2x^4+6x^3+4x^2-6x+4) : (x^3+3x^2+x-5) = 2x \\
-\underline{(2x^4+6x^3+2x^2-10x)} \\
\qquad\qquad 2x^2+4x+4
\end{array}
$$

Som viser at

$$\frac{2x^4+6x^3+4x^2-6x+4}{(x-1)(x^2+4x+5)} = 2x + \frac{2x^2+4x+4}{(x-1)(x^2+4x+5)}$$

Da har vi $\quad I = \int 2x\,dx + \int \frac{2x^2+4x+4}{(x-1)(x^2+4x+5)}\,dx$

$$= x^2 + I_1$$

2. Vi delbrøkoppspalter:

$$\frac{2x^2+4x+4}{(x-1)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

$$= \frac{A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+5)}$$

$$= \frac{Ax^2+4Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+4x+5)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(4A-B+C)x+(5A-C)}{(x-1)(x^2+4x+5)}$$

Koeffisientene foran hvert ledd må være like:

$$A+B=2$$
$$4A-B+C=4$$
$$5A-C=4$$

som gir $A=B=C=1$.

$$I_1 = \int \frac{2x^2+4x+4}{(x-1)(x^2+4x+5)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \ln|x-1| + I_2 .$$

3. Vi ser at den deriverte til nevneren er $2x+4$. Knepet er å få telleren til å se slik ut:

$$I_2 = \int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+(2-2)}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Det første integralet løser vi med substitusjon: $u = x^2+4x+5$

$$\frac{du}{dx} = 2x+4$$

$$du = (2x+4)\,dx$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - I_3$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + I_3 = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - I_3$$

4. Nå gjenstår kun

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Først fullfører vi kvadratet:

$$(x^2+4x+5) = (x^2+4x+4)+1$$
$$= (x+2)^2+1 .$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

Vi vet at $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$.

Substitusjonen $u = x+2$, $du = dx$ gir oss det vi trenger:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c$$
$$= \arctan(x+2) + c .$$

Samler vi alle delene, får vi:

$$I = x^2 + \ln|x-1| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \arctan(x+2) + C.$$