Differensialligninger

Ligninger som inneholder både en funksjon, f.eks. $y(x)$, og dens deriverte, $y'(x)$.

Brukes til å beskrive bl.a. endringer.
Da trenger vi å vite:

$\frac{dy}{dx}$ = "endringen i y pr. enhet x".

$\frac{dy}{dx} = ky$ betyr da "endringen i y pr. enhet x er proporsjonal med y".

De typer diffligninger vi møter i dag, kan deles inn i førsteordens separable / ikke-separable og med eller uten initialkrav.

Separable diff.ligninger

Gitt diffligningen
$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

Dersom vi kan få alle x (samt dx) på en side og alle y (og dy) på den andre, kalles ligningen separabel.

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

$$dy = 3y\,dx$$

$$\frac{dy}{y} = 3\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx$$

$$\ln|y| = 3x + c$$

$$|y| = e^{3x+c} = e^{3x} \cdot e^{c} \qquad (e^{c} =$$

$$|y| = c_1 e^{3x}$$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{3x}}}$$

Stemmer løsningen tro?

Den y vi har funnet, må passe inn i $\frac{dy}{dx} = 3y$

V.S : $y'(x) = 3c_1 e^{3x}$

H.S : $3y = 3c_1 e^{3x}$

V.S = H.S.

Initialbetingelse

Dersom forrige oppgave hadde en tilleggsbetingelse $y(0) = 1$:

Vi løser først ligningen, så bruker vi IV til å bestemme konstanten:

$$y(x) = C_1 e^{3x}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 e^{3 \cdot 0} = 1$$

$$C_1 = 1$$

$$\underline{\underline{y(x) = e^{3x}}}$$

Integrerende faktor

Finn den generelle løsningen av

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = x^2 + 1 \qquad (x > 0).$$

Ligningen er ikke separabel.

Integrerende faktor : $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$,

som gir $e^{\ln x} = x$ (C er valgt lik 0).

Vi multipliserer ligningen $(*)$ med x :

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = x^3 + x$$

(produktregelen for den deriverte)

$$\frac{d}{dx}[x \cdot y] = x^3 + x$$

(integrerer på begge sider)

$$x \cdot y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}.$$

NB! Før du finner integrerende faktor, husk å sett ligningen på standard form:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Å sette opp diffligninger

1) La $y(t)$ være en størrelse. Med endringsraten til y menes den deriverte dy/dt.
(Andre ord for dy/dt: vekstfarten til y, veksthastigheten til y, etc.)

2) At uttrykk 1 er proporsjonalt med uttrykk 2 betyr at det fins en konstant k slik at

$$(\text{uttrykk } 1) = k \cdot (\text{uttrykk } 2)$$

3) At uttrykk 1 er omvendt proporsjonalt med uttrykk 2 betyr at det fins en konstant k slik at

$$(\text{uttrykk } 1) = k / (\text{uttrykk } 2) .$$

Eksempel

Anta at q er en funksjon av t, og at teksten sier at "vekstfarten til q er proporsjonal med produktet av størrelsene q og $100-q$.

$$\frac{dq}{dt} = k \cdot q \cdot (100-q) .$$

Eksempel

Et radioaktivt stoff nedbrytes proposjonalt med det som til enhver tid er igjen av stoffet. Halveringstiden er T [år], og vi starter med en mengde R_0. Finn et uttrykk for hvor mye vi har av stoffet til enhver tid.

"nedbrytes proposjonalt med ..."

$$\frac{dR}{dt} = -kR \qquad , k > 0 . \qquad (*)$$

"halveringstid..."

$$R(T) = \frac{R_0}{T} \qquad (\Delta)$$

"startmengde ..."

$$R(0) = R_0 \qquad (\Delta)$$

løser ligningen (*)

- ligningen er separabel :

$$\frac{dR}{R} = -k dt$$

- når alle R er på venstre side, og alle t på høyre, kan vi integrere :

$$\int \frac{dR}{R} = \int k dt$$

$$\ln R = -kt + c$$

$$R = e^{-kt+c}$$

$$R = e^{-kt} \cdot e^{c} \qquad , e^{c} = c_1$$

$$R = ce^{-kt} \quad .$$

Nå skal vi bruke de to andre opplysningene (Δ) til å bestemme c og k :

- $R(0) = R_0 \Rightarrow \quad ce^{-k \cdot 0} = R_0$

$$c = R_0$$

$$R(t) = R_0 e^{-kt}$$

- $R(T) = \frac{R_0}{2} \Rightarrow R_0 e^{-k \cdot T} = \frac{R_0}{2}$

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

$$-kT = \ln \frac{1}{2} \qquad \left(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b\right)$$

$$-kT = -\ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{T}$$

$$R(t) = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \quad .$$

Eksempel

Vi skal kjøre bil fra Oslo til Kragerø. Når vi starter, har vi 30 l bensin på tanken. Bilen kjører med jevn fart, og motoren har et konstant bensinforbruk på 0,8 l/mil. Uheldigvis er det også en lekkasje i bensintanken der bensinen strømmer ut. Utstrømningsraten er proporsjonal med bensinvolumet i tanken, med proporsjonalitetskonstant $0{,}1 \text{ mil}^{-1}$.

Vi lar $V(x)$ være bensinvolumet i tanken (målt i liter) som funksjon av kjørt distanse x (målt i mil).

a) Still opp en differensialligning for $V(x)$ og løs denne med initialbetingelse $V(0) = 30$.

b) Regn ut hvor langt vi kan kjøre (uten å etterfylle bensin) før tanken er tom. Fra Oslo til Kragerø er det 19,7 mil. Hvor mye bensin måtte vi ha på tanken for å kunne komme helt frem?

a) $\frac{dV}{dx}$ gir oss endringen i bensinvolumet pr. mil.

$$\frac{dV}{dx} = -0,8 - 0,1V$$

Ligningen er separabel:

$$\frac{dV}{0,8+0,1V} = -dx$$

Variablene er separert, da kan vi integrere:

$$\int \frac{dV}{0,8+0,1V} = \int -dx$$

$$10 \ln|0,8+0,1V| = -x + C$$

$$\ln|0,8+0,1V| = -\frac{1}{10}x + C'$$

$$0,8+0,1V = e^{-\frac{1}{10}x+c'} = C''e^{-\frac{1}{10}+c'} \quad (e^{c'} = c'').$$

$$0,1V = C''e^{-\frac{1}{10}x} - 0,8$$

$$V(x) = C'''e^{-\frac{1}{10}x} - 8 \quad (10c'' = c''').$$

$$V(0) = 30 \Rightarrow C''' - 8 = 30 \Rightarrow C = 38$$

$$\underline{\underline{V(x) = 38e^{-\frac{x}{10}} - 8}}.$$

b) Antar at x_α er antall mil vi kan kjøre før bensintanken er tom:

$$V(x_\alpha) = 0 \Rightarrow 38e^{-\frac{x_\alpha}{10}} - 8 = 0$$

$$38e^{-\frac{x_\alpha}{10}} = 8$$

$$e^{-\frac{x_\alpha}{10}} = \frac{8}{38}$$

$$-\frac{x_\alpha}{10} = \ln\frac{4}{19}$$

$$x_\alpha = -10\ln\frac{4}{19}$$

$$\underline{\underline{x_\alpha \approx 15{,}6 \text{ mil.}}}$$

Antar at vi trenger V_0 liter bensin for å kjøre 19,7 mil.

$$V(0) = V_0 \Rightarrow C''' e^{-\frac{1}{10}\cdot 0} - 8 = V_0$$

$$C''' = V_0 + 8$$

$$V(x) = (V_0+8)e^{-\frac{1}{10}\cdot t} - 8$$

$$V(19{,}7) = 0 \Rightarrow (V_0+8)e^{-1{,}97} - 8 = 0$$

$$(V_0+8)e^{-1{,}97} = 8$$

$$V_0 = \frac{8}{e^{-1{,}97}} - 8$$

$$\underline{\underline{V_0 \approx 49{,}4}}$$