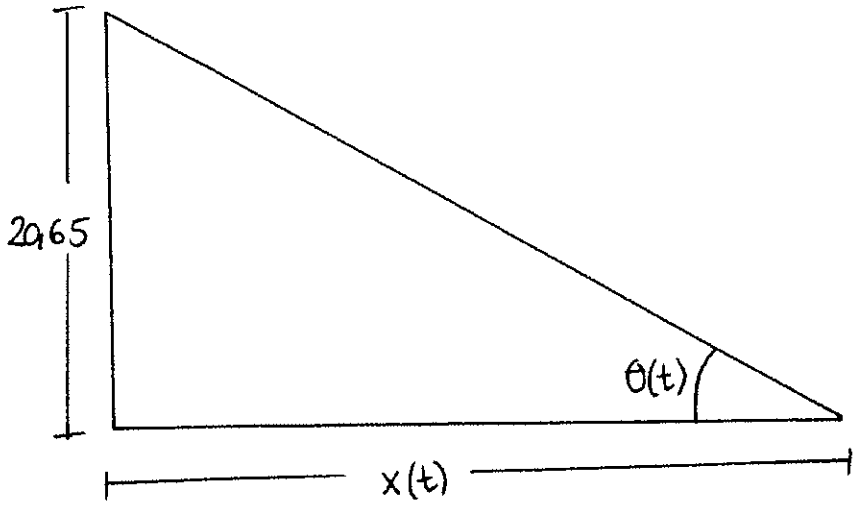
Løsningsforslag, øvingsoppgaver

③



$$\frac{d\theta}{dt} = -\pi/6$$

- Vi skal finne endringen i $x(t)$, idet $\theta = \pi/6$. Dette er det samme som å finne $\frac{dx}{dt}$. Vi trenger altså en sammenheng mellom x og θ:

$$(*) \quad \tan(\theta(t)) = \frac{20{,}65}{x(t)}$$

- Vi kan enten sette $x(t)$ for seg selv på venstre side, og så derivere som vanlig, eller vi kan derivere implisitt:

$$(**) \quad \frac{1}{\cos^2(\theta(t))} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-20{,}65\, x'(t)}{x(t)^2}$$

Idet $\theta(t) = \pi/6$, er $(*)\ x(t) = \dfrac{20{,}65}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 35{,}7$

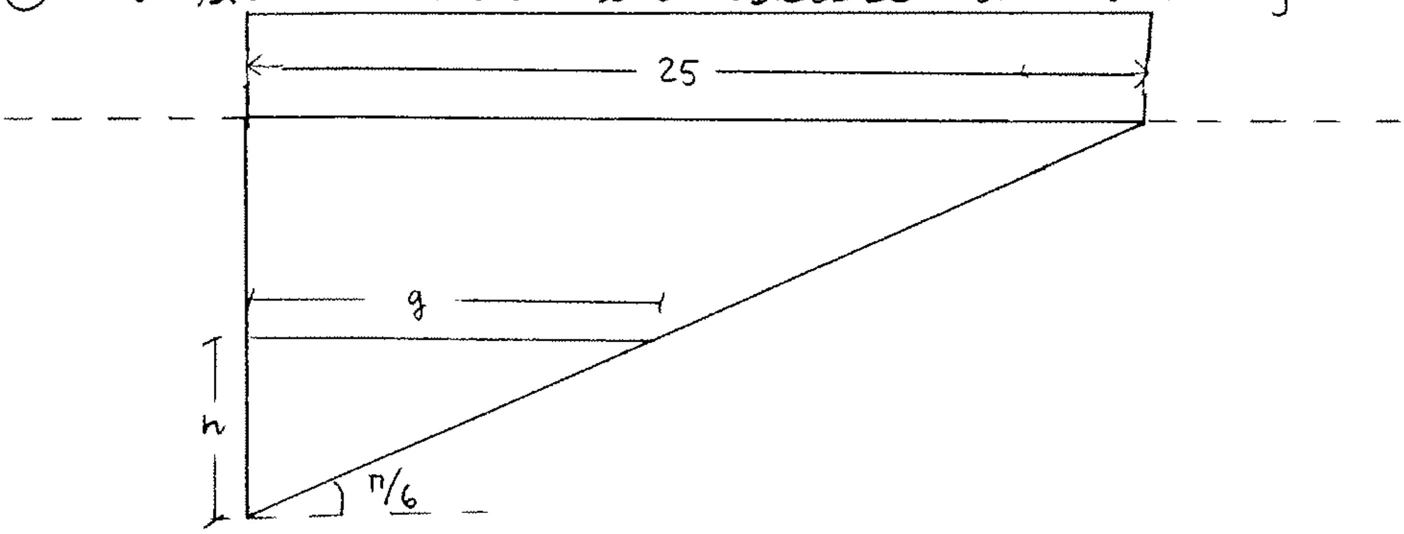
$(\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3})$.

I (* *) har vi nå alle størrelser bortsett fra $x'(t)$ som vi nå skal finne:

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\left(-\pi/6\right) = \frac{-20{,}65 \cdot x'(t)}{(35{,}77)^2}$$

$$\underline{\underline{x'(t) = 43{,}27 \text{ m/time}}}$$

⑥ Vi starter med en skisse av bassenget:



Dette er altså et tverrsnitt, og bassenget går 10 meter "innover" i papiret.

NB! Her må vi huske å passe på dimensjonene. $1\,dm^3 = 1$ liter.

Siden $V(h(t))$, blir $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Det er endringen i vannhøyden vi skal finne, dvs. $\frac{dh}{dt}$. Vi vet at endringen i volumet er $\frac{dV}{dt} = 500\ l/min$. Da må vi altså finne et uttrykk for volumet m.h.p. h:

$$V = \frac{g \cdot h}{2} \cdot 10\ m^3 = \frac{\sqrt{3}\, h \cdot h}{2} \cdot 10 \cdot 1000\ dm^3$$

$$= 5000\sqrt{3}\, h^2\ dm^3 = 5000\sqrt{3}\, h^2\ l$$

$\left(\tan \pi/6 = \frac{h}{g}\right)$.

$$\frac{dV}{dh} = 10000\sqrt{3}\,h$$

Altså : $500 = 10.000\sqrt{3}\,h \cdot \frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{20\sqrt{3}\,h}$$

Vi kan spandere på oss å observere at etterhvert som h øker, så avtar endringen i vannhøyden (hvorfor er det logisk?).

Etter 10minutter er det $500 \cdot 10 = 5000$ liter vann i bassenget. I det øyeblikket er høyden h : $5000 = 5000\sqrt{3}\,h^2$

$$\underline{h \approx \pm\, 0{,}76 \text{ dm}}$$

Vannhøyden er altså 0,76 dm etter 10min. Endringen blir da:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{20\sqrt{3}\cdot 0{,}76} \approx 0{,}038 \text{ dm/min} = \underline{\underline{0{,}038 \text{ l/m}}}$$

Etter 65 timer: Sjekk om vannet har fylt opp trekanten. I så fall må vi regne med en annen høydeformel .... (ikke glem riktig dimensjon!)

Løsningsforslag, eksamensoppgaver fra første samling (derivasjon)

(Med forbehold om trykkfeil)

NB! Det fins mange fremgangsmåter, dette er kun et forslag.

1) Vi kan skrive tangenten slik $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, der $x_0=1$ og $y_0=\pi$. Vi trenger altså å finne hva den deriverte til y er i punktet π. Siden vi ikke kan løse ut y som en funksjon av x, må vi bruke implisitt derivasjon:

$$2y+2x\frac{dy}{dx}+\cos y\frac{dy}{dx}=0.$$

Setter vi inn for x_0 og y_0 får vi $2\pi+2\cdot 1\frac{dy}{dx}+\cos(\pi)\frac{dy}{dx}=0$.

Vi løser med hensyn på $\frac{dy}{dx}$ og får at denne er lik -2π. Da gjenstår det bare å sette inn i formelen for tangenten $y-\pi=-2\pi(x-1)$, som til slutt gir $y(x)=-2\pi x+3\pi$.

4) Vi må starte med å tegne litt. Sett om opp en strek som symboliserer wiren. Vi skal avgjøre hvordan vi skal dele wiren, sette vi denne lengden til x. Resterende bit er da L-x. Vi bestemmer at den første biten skal brukes til kvadratet, og denne må da ha sider $\frac{x}{4}$ siden det skal være et kvadrat. Arealet av kvadratet er da $A_{kvadrat}(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$.

Den andre biten skal brukes til trekanten, og sidene i denne må da være $\frac{L-x}{3}$. For å finne arealet trenger vi høyden i trekanten. Sett opp en figur, bruk Pytagoras på trekanten som har kateter $\frac{\frac{L-x}{3}}{2}$ og høyde h, samt hypotenus $\frac{L-x}{3}$. Da får vi høyden h til å bli $\frac{L-x}{2\sqrt{3}}$. Da kan vi regne ut arealet av trekanten,

$$A_{trekant}(x)=\frac{\frac{L-x}{3}\cdot\frac{L-x}{2\sqrt{3}}}{2}=\frac{(L-x)^2}{12\sqrt{3}}.$$

Nå skal vi gjøre det totale arealet minst mulig, og det gjør vi ved hjelp av derivasjon:

$$A_{total}'(x) = A_{kvadrat}'(x) + A_{trekant}'(x) = \frac{1}{16}\cdot 2x + \frac{1}{12\sqrt{3}}\cdot 2(L-x)(-1) = \frac{x}{8} - \frac{(L-x)}{6\sqrt{3}}.$$

Så setter vi lik 0, og løser ut x

$$\frac{x}{8} - \frac{(L-x)}{6\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{3}x = 8(L-x) \Leftrightarrow 6\sqrt{3}x + 8x = 8L \Leftrightarrow x(6\sqrt{3}+8) = 8L$$

$$x = \frac{8}{6\sqrt{3}+8}L = \frac{4}{3\sqrt{3}+4}L$$

Vi har da kandidaten til minst mulig areal. Det gjenstår nå å vise at dette punktet virkelig er et minimumspunkt for $A_{total}(x)$ ved hjelp av den andrederiverte:

$A_{total}''(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{6\sqrt{3}}(-1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{3}} > 0$, altså er det en minimumsverdi.

Ekstra: Hva skjer dersom vi velger å bruke wire-delen av lengde x til trekanten?

Tegn opp situasjonen. Det fins flere måter å regne oppgaven på, man en tegning er en fordel uansett. I denne oppgaven er dimensjonene viktig, og jeg velger å bruke [km] og [t]. Da er avstandene mellom tunnelåpningen og skiltet, samt mellom tunnelåpningen og politimannen, begge 0,2 km.

Dersom vi setter avstanden fra tunnelåpningen lik *x(t)* og avstanden mellom politimannen og bilen lik *y(t)*, gir Pytagoras at $x(t)^2 + 0{,}2^2 = y(t)^2$. Implisitt derivasjon med hensyn på t gir da $2x(t)x'(t) + 0 = 2y(t)y'(t)$, eller $x(t)x'(t) = y(t)y'(t)$.

Vi skal finne farten til *x(t)*, altså endringen i avstanden som jo nettopp er *x'(t)*. Vi setter måletidspunktet til $t = 0$. Da er $x(0) = 0{,}2$, $y(0) = 0{,}2\sqrt{2}$ og $y'(0) = 65$. Setter vi inn og løser med hensyn på x'(0), får vi at farten til bilen er $91{,}9\,km/t$.

3)b, I denne oppgaven skal vi vise at grafen til ligningen ikke har horisontale tangenter. For å gjøre det, skal vi bruke en spesiell teknikk som kalles motsigelsesbevis. Ideen er da å anta at det motsatt er tilfellet, altså at grafen har horisontal(e) tangent(er). Dersom vi så kan vise at denne antagelsen gir en motsigelse, kan vi trekke konklusjonen at vår antagelse er gal, og det motsatt gjelder. La oss se hva som skjer:

Dersom grafen har horisontale tangenter, vil det bety at det fins punkter x som gjør at

$\frac{dy}{dx} = 0$. Vi må da få tak i den deriverte, og vi går løs på implisitt derivasjon:

$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$. Med $\frac{dy}{dx}$ betyr dette at $y = 3x^2$. Altså har vi det konkrete uttrykket for funksjonen *y(x)*. Dette skal altså passe inn i ligningen vår. La oss sette en prøve på dette:

Venstre side: $x^3 + \left(3x^2\right)^3 = x^3 + 27x^6$

Høyre side: $x \cdot 3x^2 - 1 = 3x^3 - 1$

Dette stemmer jo ikke. De to uttrykkene er ikke lik hverandre. Altså; den antagelsen vi gjorde i starten kan ikke være riktig, så grafen kan ikke ha noen horisontale tangenter.