Vi skal finne ut hvilken av de fire funksjonene som ikke er deriverbar i $x = 0$. Vi vet at hvis funksjonen er deriverbar i punktet, så er den også kontinuerlig i punktet, så hadde vi funnet at en av disse funksjonene ikke var kontinuerlige i $x = 0$ ville vi vært ferdige. Men alle er kontinuerlige i origo. Sjekk selv at $f(0) = 0$ og $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ i alle fire tilfellene.

Dermed må vi sjekke om den deriverte eksisterer i $x = 0$. Det vil si at vi må sjekke om grensen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

eksisterer. (Husk at $f(0) = 0$.) Husk også at grensen eksisterer hvis, og bare hvis, de to ensidige grensene eksisterer (vi trenger dette for B og C).

A.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$$

Den siste likheten følger fra skvisesetningen fordi $-|h| \leq h\sin\frac{1}{h} \leq |h|$. (Fordi $-1 \leq \sin\frac{1}{h} \leq 1$.) Dermed eksisterer den deriverte i origo.

B.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^h}{1} = 1$$

Den nest siste likheten følger av l'Hôpital. Samtidig har vi

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Den siste likheten er noe vi kan (og som var nok arbeid til at jeg ikke har tenkt å gjengi det her. . . .) Fordi både den høre og den venstre grensen er like har vi at grensen eksisterer, så den deriverte eksisterer i origo også her.

C.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tan h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h}\frac{1}{\cos h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\cos h} = 1 \cdot 1 = 1$$

Samtidig har vi

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(h^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{2h}{h^2+1}}{1} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h^2+1} = 0$$

Fordi de ensidige grensene ikke er like, eksister ikke grensen i origo, og dermed heller ikke den deriverte.

D. Denne er så lik den første, at denne klarer du kanskje selv med litt arbeid?