Faglig kontakt: Kari Hag (73 59 35 21, 48 30 19 88) **Studentnr.** ________________

Semesterprøve i MA6101 den 4.11.06
Tid: 90 min. Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

Del I

Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål i del I. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. Det reelle tallet $\dfrac{(1+\sin\frac{\pi}{3})^2-\sqrt{3}}{2}$ er lik

☐ et irrasjonalt tall ☐ 0 ☐ 1 ☐ et rasjonalt tall $\neq 0, 1$

2. Vi skal bruke definisjonen av konvergens til å vise at følgen $\{a_n\}$ gitt ved $a_n = \dfrac{n-\sqrt{n}}{n}$ konvergerer mot 1. Så gitt vilkårlig $\varepsilon > 0$, hvor stor må N våre for at $|a_n - 1| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$?

☐ Større enn $\max\{1, \varepsilon/2\}$ ☐ Større enn $1/\sqrt{\varepsilon}$ ☐ Større enn $1/\varepsilon$ ☐ Større enn $1/\varepsilon^2$

3. I en likebeint trekant er de to like lange sidene 4 cm hver. Hva er det største arealet trekanten kan ha?

☐ $4\sqrt{3}$ ☐ 8 ☐ $8\sqrt{2}$ ☐ 16

4. Den deriverte til funksjonen $f(x) = x^2 \cot x,\ 0 < x < \pi$, er

☐ $2x\cot x$ ☐ $\dfrac{2x}{\cos^2 x}$ ☐ $\dfrac{-2x}{\sin^2 x}$ ☐ $\dfrac{x\sin 2x - x^2}{\sin^2 x}$

5. Hvilken ulikhet gjelder for alle $x > 0$?

☐ $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$ ☐ $\arctan x > x$ ☐ $\arctan x < \dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ $\arctan x < \sin x$

6. Funksjonen $f(x) = x^3 + 2x + 1$ har en omvendt funksjon f^{-1}. Den deriverte $(f^{-1})'(1)$ er lik:

☐ 5 ☐ 1/5 ☐ 1/2 ☐ 2

7. Den deriverte til funksjonen $F(x) = \displaystyle\int_0^{3x} e^{t^2}\, dt$, er

☐ e^{9x^2} ☐ udefinert da integralet ikke lar seg regne ut ☐ $3e^{9x^2}$ ☐ e^{x^2}

8. Området begrenset av x-aksen og grafen til $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$, roteres om y-aksen. Hva blir volumet av omdreiningslegemet?

☐ π ☐ $\frac{9\pi}{4}$ ☐ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ☐ 2π

Del II

Her skal du begrunne svaret ditt, og ta med alle nødvendige mellomregninger.

9. For hvert naturlig tall n er P_n utsagnet

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 < n^4.$$

Vis at dersom P_k er sann for et naturlig tall k, så er P_{k+1} også sann. Er P_n sann for alle n?

10. La funksjonen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Er f kontinuerlig og deriverbar for alle x?